Hoofdstuk

8

Complexe getallen

Inhoudstafel

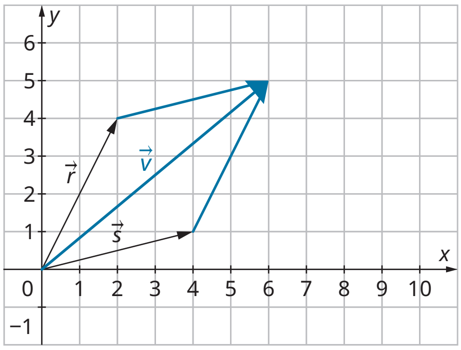
Prikkel

Wat kan ik al?

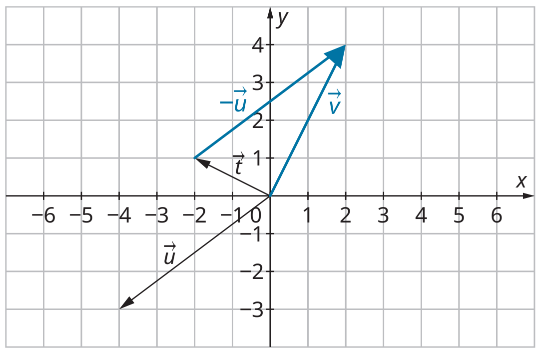
Signaaloefening 1 p. 121

Teken $\vec{v}$.

a $\vec{v} = \vec{r} + \vec{s}$



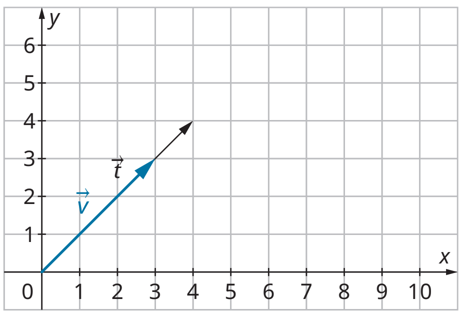
b $\vec{v} = \vec{t} - \vec{u}$



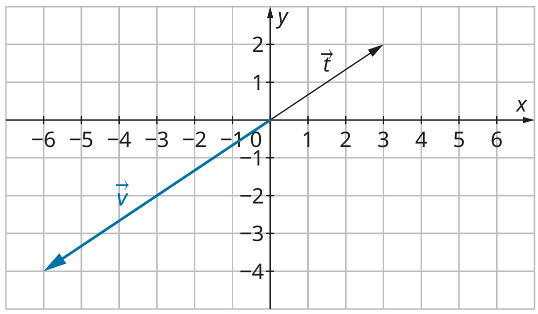
Signaaloefening 2 p. 121

Teken $\vec{v}$.

a $\vec{v} = \frac{3}{4}\vec{t}$



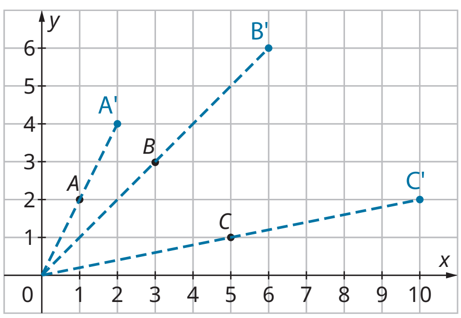
b $\vec{v} = -2\vec{t}$



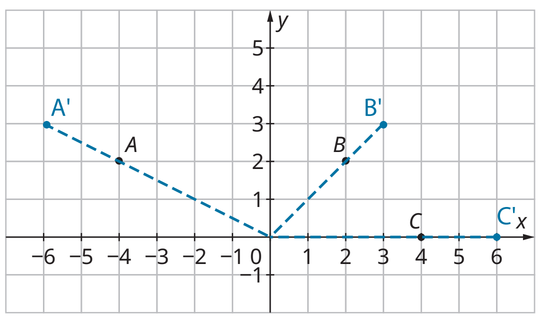
Signaaloefening 3 p. 121

Teken de homothetiebeelden van de gegeven punten.

a $h_{(O,\,2)}(A) = A'$
$h_{(O,\,2)}(B) = B'$
$h_{(O,\,2)}(C) = C'$



b $h_{\left(O,\,\frac{3}{2}\right)}(A) = A'$
$h_{\left(O,\,\frac{3}{2}\right)}(B) = B'$
$h_{\left(O,\,\frac{3}{2}\right)}(C) = C'$

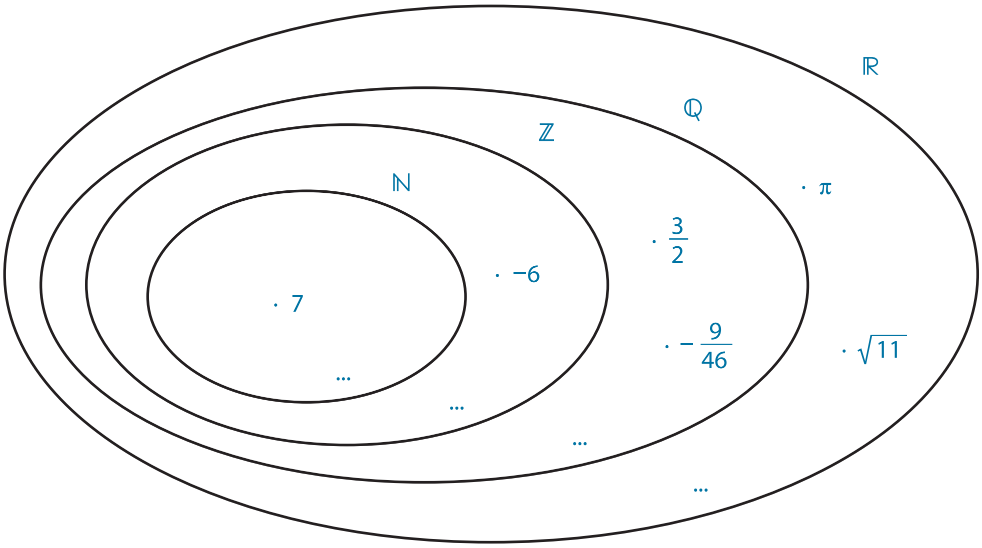


Signaaloefening 4 p. 122

a Noteer in het venndiagram de symbolen van de getallenverzamelingen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$.

b Noteer de getallen in het venndiagram.

$\sqrt{11}$ $\quad -6 \quad$ $\frac{3}{2}$ $\quad -\frac{9}{46} \quad$ π $\quad 7$



Signaaloefening 5 p. 122

Werk uit.

a $(7 + 3x)^2$

$= 49 + 42x + 9x^2$

merkwaardig product $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b $\left(10a - \sqrt{19}\,a^2\right)\left(10a + \sqrt{19}\,a^2\right)$

$= 100a^2 - 19a^4$ merkwaardig product $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

c $(2x + 3)(3x - 2)$

$= 6x^2 - 4x + 9x - 6$

$= 6x^2 + 5x - 6$

1 Van reële naar complexe getallen

1.1 Definitie

Oefening 1 p. 123

a Los de vergelijkingen op.

1 $2x - 10 = 0$

$2x = 10$

$x = 5$

2 $3x + 6 = 0$

$3x = -6$

$x = -2$

3 $3x - 2 = 0$

$3x = 2$

$x = \frac{2}{3}$

4 $x^2 - 2 = 0$

methode 1

$(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = 0$

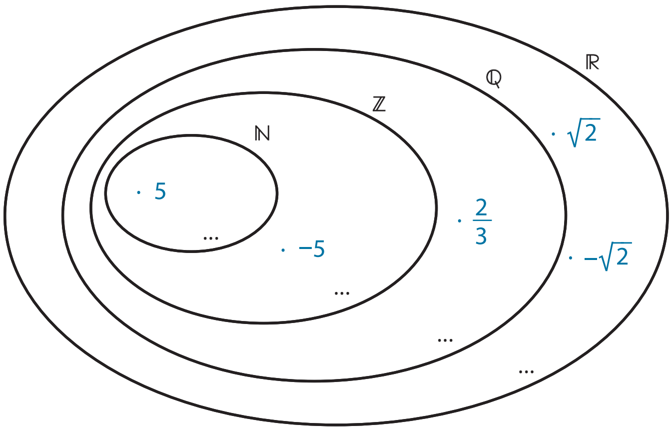
$x = -\sqrt{2}$ of $x = \sqrt{2}$

methode 2

$x^2 = 2$

$x = \sqrt{2}$ of $x = -\sqrt{2}$

b Noteer de oplossingen in het venndiagram.



c Verklaar waarom de vergelijkingen geen reële oplossingen hebben.

1 $x^2 + 1 = 0$

Het kwadraat van een reëel getal is altijd positief. Als je dit getal vermeerdert met 1, kan het nooit 0 zijn.

2 $(x + 1)^2 = -1$

Het linkerlid van de vergelijking is een kwadraat van een reëel getal en dus zeker positief. Het linkerlid kan dus nooit gelijk zijn aan -1.

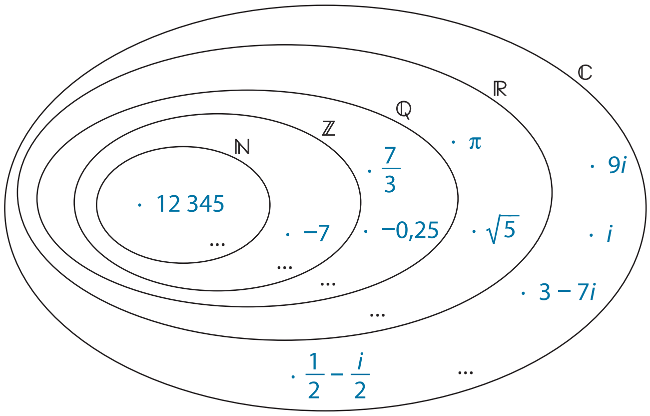
3 $2x^2 - 3x + 5 = 0$

Omdat $D = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -31 < 0$ heeft de vergelijking geen oplossingen in $\mathbb{R}$.

Oefening 2 p. 125

Plaats de getallen in het venndiagram.

$3 - 7i$	i
$\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$	π
12 345	$9i$
$-0{,}25$	$\sqrt{5}$
-7	$\frac{7}{3}$



Oefening 3 p. 125

Voor welke waarden van v en w, met $v, w \in \mathbb{R}$ zijn z_1 en z_2 gelijke complexe getallen?

a $z_1 = (v + 3) + (w - 1)i$

$z_2 = (2v + w) + 3i$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} v + 3 = 2v + w \\ w - 1 = 3 \end{cases}$$

$w - 1 = 3$

$w = 4$

$v + 3 = 2v + w$

$v + 3 = 2v + 4$

$v - 2v = 4 - 3$

$-v = 1$

$v = -1$

z_1 en z_2 zijn gelijke complexe getallen als $w = 4$ en $v = -1$.

b $z_1 = (v + 2) - (w + 3)i$

$z_2 = v^2 + (3 + w)i$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} v + 2 = v^2 \\ -(w + 3) = 3 + w \end{cases}$$

$v + 2 = v^2$

$0 = v^2 - v - 2$

$D = b^2 - 4ac$

$= (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)$

$= 9$

$-(w + 3) = 3 + w$

$-w - 3 = 3 + w$

$-2w = 6$

$w = -3$

$v = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ of $v = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$

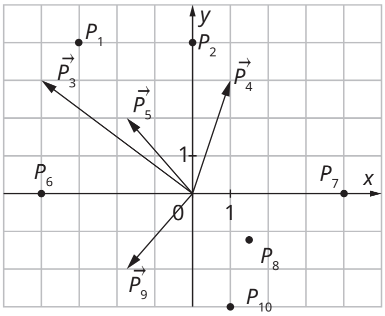
$v = \dfrac{1 + \sqrt{9}}{2 \cdot 1}$ of $v = \dfrac{1 - \sqrt{9}}{2 \cdot 1}$

$v = 2$ of $v = -1$

z_1 en z_2 zijn gelijke complexe getallen als $w = -3$ en $v = 2$, of $w = -3$ en $v = -1$.

Oefening 4 p. 125

Noteer het beeldpunt of de vector die het complexe getal voorstelt.



a $1 + 3i$

$\overrightarrow{P_4}$

b $-3 + 4i$

P_1

c $\frac{3}{2} - \frac{5}{4}i$

P_8

d $-\sqrt{3} + 2i$

$\overrightarrow{P_5}$

e $4i$

P_2

Oefening 5 p. 126

Teken de beeldpunten van de complexe getallen.

a *A* is het beeldpunt van -3.

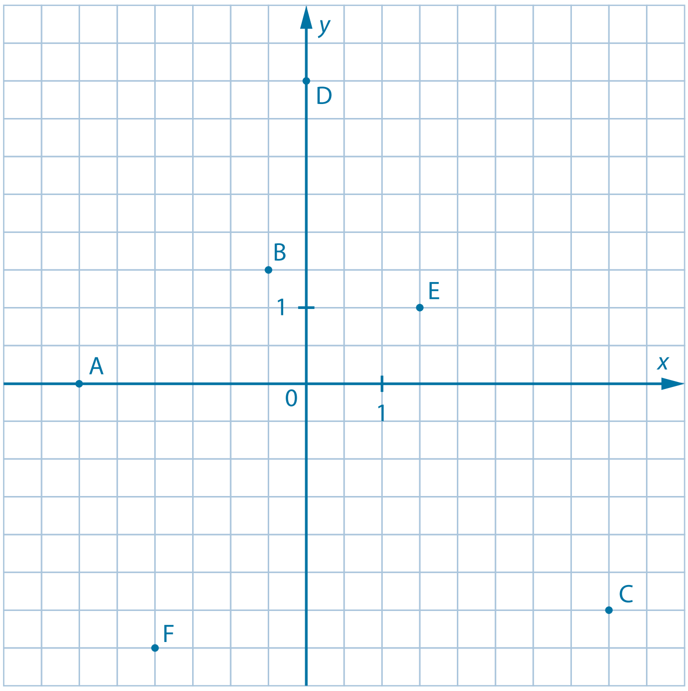
b *B* is het beeldpunt van $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$.

c *C* is het beeldpunt van $4 - 3i$.

d *D* is het beeldpunt van $4i$.

e *E* is het beeldpunt van $i + \frac{3}{2}$.

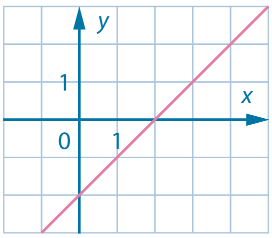
f *F* is het beeldpunt van $-2 - \frac{7}{2}i$.



Oefening 6 p. 126

Teken in het complexe vlak de beeldpunten van alle complexe getallen $a + bi$ die voldoen aan $a = 2 + b$.

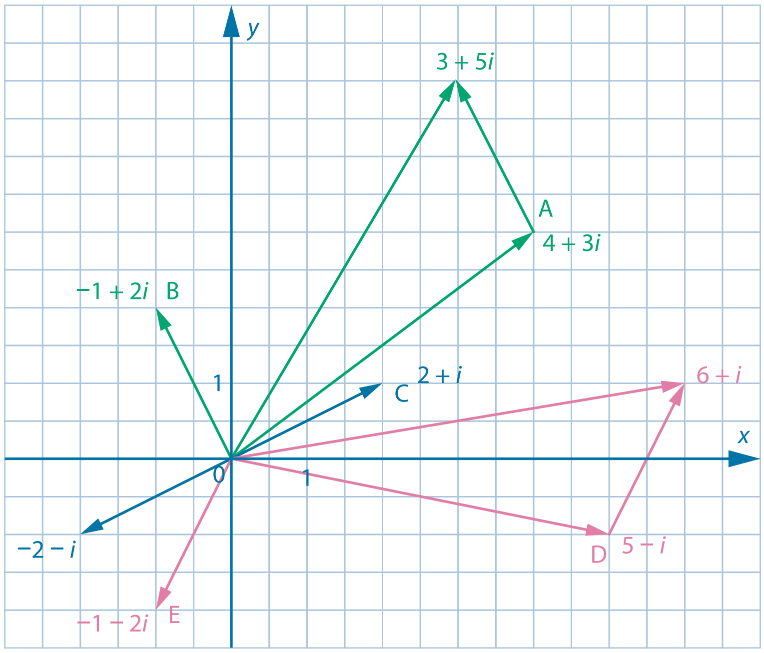
Je kunt de vergelijking omvormen naar $b = a - 2$. Dat is de vergelijking van een rechte met rico = 1 die de y-as snijdt in P(0, –2). Alle beeldpunten van de getallen die aan deze voorwaarde voldoen, liggen op de rechte met vergelijking $b = a - 2$.



2 Rekenen met complexe getallen

2.1 Som en verschil van twee complexe getallen

Oefening 7 p. 127



a Stel

A is het beeldpunt van $z_1 = 4 + 3i$
B is het beeldpunt van $z_2 = -1 + 2i$

1
- Teken de som van $\vec{A}$ en $\vec{B}$.
- Welk complex getal stelt deze vector voor?

$3 + 5i$

2 Bereken $z_1 + z_2$ met behulp van de rekenregels voor lettervormen.

$(4 + 3i) + (-1 + 2i)$

$= 4 + 3i - 1 + 2i$

$= 4 - 1 + 3i + 2i$

$= 3 + 5i$

b Stel

C is het beeldpunt van $z_3 = 2 + i$

1
- Teken de tegengestelde vector van $\vec{C}$.
- Welk complex getal stelt deze vector voor?

$-2 - i$

2 Bereken $-z_3$ met behulp van de rekenregels voor lettervormen.

$-(2 + i)$

$= -2 - i$

c Stel

D is het beeldpunt van $z_4 = 5 - i$
E is het beeldpunt van $z_5 = -1 - 2i$

1
- Teken het verschil van $\vec{D}$ en $\vec{E}$.
- Welk complex getal stelt deze vector voor?

$6 \quad + i$

2 Bereken $z_4 - z_5$ met behulp van de rekenregels voor lettervormen.

$(5 - i) - (-1 - 2i)$

$= 5 - i + 1 + 2i$

$= 5 + 1 - i + 2i$

$= 6 + i$

Oefening 8 p. 129

Bereken.

a $(6 + 3i) + (2 + i)$

$= 6 + 3i + 2 + i$

$= 8 + 4i$

b $(2 - i) + (-7 + 3i)$

$= 2 - i - 7 + 3i$

$= -5 + 2i$

c $(2 - i) - (-7 + 3i)$

$= 2 - i + 7 - 3i$

$= 9 - 4i$

d $\left(\frac{4}{3} + 5i\right) + \left(2 - \frac{5}{3}i\right)$

$= \frac{4}{3} + 5i + 2 - \frac{5}{3}i$

$= \frac{4}{3} + \frac{6}{3} + \left(\frac{15}{3} - \frac{5}{3}\right)i$

$= \frac{10}{3} + \frac{10}{3}i$

e $3i + (4 - 3i)$

$= \cancel{3i} + 4 \cancel{- 3i}$

$= 4$

f $(-1 + 4i) + (1 - 4i)$

$= \cancel{-1} + \cancel{4i} + \cancel{1} \cancel{- 4i}$

$= 0$

g $(-2 + 5i) - 8$

$= -2 + 5i - 8$

$= -10 + 5i$

h $(4 + 7i) - (3 + 7i)$

$= 4 + \cancel{7i} - 3 \cancel{- 7i}$

$= 1$

i $(3 + 2i) + (3 - 2i)$

$= 3 + \cancel{2i} + 3 \cancel{- 2i}$

$= 6$

j $\left(\sqrt{5} + \sqrt{2}i\right) - \left(\sqrt{5} - \sqrt{2}i\right)$

$= \cancel{\sqrt{5}} + \sqrt{2}i \cancel{- \sqrt{5}} + \sqrt{2}i$

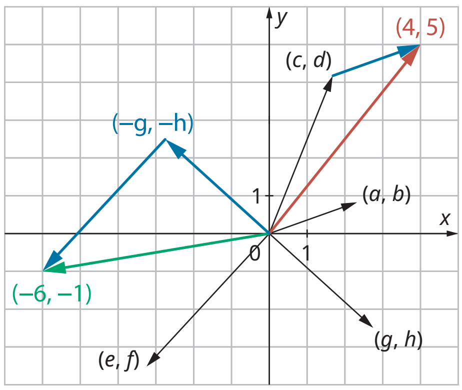
$= 2\sqrt{2}i$

Oefening 9 p. 130

1 Teken de som van de complexe getallen.
2 Lees de som af in het complexe vlak.

a $(a + bi) + (c + di) = 4 + 5i$

b $(e + fi) - (g + hi) = -6 - i$



Oefening 10 p. 130

Eigenschappen van de optelling in $\mathbb{C}$

a De optelling in $\mathbb{C}$ is commutatief.

1 Noteer de eigenschap in symbolen.

$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}: z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

2 Bewijs.

Kies twee willekeurige complexe getallen z_1 en z_2.

Stel $z_1 = a + bi$ en $z_2 = c + di$ met $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di)$

$= (a + c) + (b + d)i$ (1) som van complexe getallen

$z_2 + z_1 = (c + di) + (a + bi)$

$= (c + a) + (d + b)i$ (2) som van complexe getallen

Uit (1) en (2) volgt dat $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$. optelling in $\mathbb{R}$ is commutatief ■

b De optelling in $\mathbb{C}$ is associatief.

1 Noteer de eigenschap in symbolen.

$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}: z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

2 Bewijs.

Kies drie willekeurige complexe getallen z_1, z_2 en z_3.

Stel $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ en $z_3 = e + fi$ met $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

$(z_1 + z_2) + z_3 = ((a + bi) + (c + di)) + (e + fi)$

$= ((a + c) + (b + d)i) + (e + fi)$ som van complexe getallen

$= ((a + c) + e) + ((b + d) + f)i$ (1) som van complexe getallen

$z_1 + (z_2 + z_3) = (a + bi) + ((c + di) + (e + fi))$

$= (a + bi) + ((c + e) + (d + f)i)$ som van complexe getallen

$= (a + (c + e)) + (b + (d + f))i$ (2) som van complexe getallen

Uit (1) en (2) volgt dat $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$. optelling in $\mathbb{R}$ is associatief ■

c 0 is het neutrale element voor de optelling in $\mathbb{C}$.

1 Noteer de eigenschap in symbolen.

$0 \in \mathbb{C}$ en $\forall z \in \mathbb{C}: z + 0 = z = 0 + z$

2 Bewijs.

Kies een willekeurig complex getal z.

Stel $z = a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$.

$z + 0 = (a + bi) + (0 + 0i)$

$= (a + 0) + (b + 0)i$ som van complexe getallen

$= a + bi$ 0 is het neutraal element voor de optelling in $\mathbb{R}$

$= z$

Analoog voor $0 = 0 + z$ ■

2.2 Product van twee complexe getallen

Oefening 11 p. 130

- Bereken met behulp van de rekenregels voor lettervormen. Houd er rekening mee dat $i^2 = -1$.
- Noteer het resultaat in de vorm $a + bi$.

a $(3 + i) \cdot (-2i)$

$= -6i - 2i^2$

$= -6i + 2$

$= 2 - 6i$

b $(2 + i) \cdot (4 + i)$

$= 8 + 2i + 4i + i^2$

$= 8 + 2i + 4i - 1$

$= 7 + 6i$

Oefening 12 p. 131

a $3 \cdot (7 + 8i)$

$= 21 + 24i$

b $(5 + 2i) \cdot i$

$= 5i + 2i^2$

$= -2 + 5i$

c $-i \cdot (-9i)$

$= 9i^2$

$= -9$

d $(3 - 2i) \cdot (2 + 3i)$

$= 6 + 9i - 4i - 6i^2$

$= 6 + 9i - 4i + 6$

$= 12 + 5i$

e $\left(\sqrt{2} - i\sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{3} - i\sqrt{2}\right)$

$= \sqrt{6} - \sqrt{4}i - \sqrt{9}i + \sqrt{6}i^2$

$= \sqrt{6} - 2i - 3i - \sqrt{6}$

$= -5i$

f $(1 - 3i) \cdot (1 - 3i)$

$= (1 - 3i)^2$

$= 1 - 6i + 9i^2$ merkwaardig product $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$= 1 - 6i - 9$

$= -8 - 6i$

g $(1 + 3i) \cdot (1 - 3i)$

$= 1 - 9i^2$ merkwaardig product $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$= 1 + 9$

$= 10$

h $\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6}i\right) \cdot \left(\frac{2}{3} - 3i\right)$

$= \frac{1}{3} - \frac{3}{2}i + \frac{5}{9}i - \frac{5}{2}i^2$

$= \frac{1}{3} - \frac{3}{2}i + \frac{5}{9}i + \frac{5}{2}$

$= \frac{2}{6} + \frac{15}{6} - \frac{27}{18}i + \frac{10}{18}i$

$= \frac{17}{6} - \frac{17}{18}i$

i $\left(\frac{7}{3} + i\right) \cdot \left(\frac{3}{14} - \frac{1}{7}i\right)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i + \frac{3}{14}i - \frac{1}{7}i^2$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}i + \frac{3}{14}i + \frac{1}{7}$

$= \frac{7}{14} + \frac{2}{14} - \frac{14}{42}i + \frac{9}{42}i$

$= \frac{9}{14} - \frac{5}{42}i$

j $(x + yi) \cdot (x - yi)$

$= x^2 - y^2i^2$ merkwaardig product $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$= x^2 + y^2$

Oefening 13 p. 131

a Bereken $3 \cdot z$.

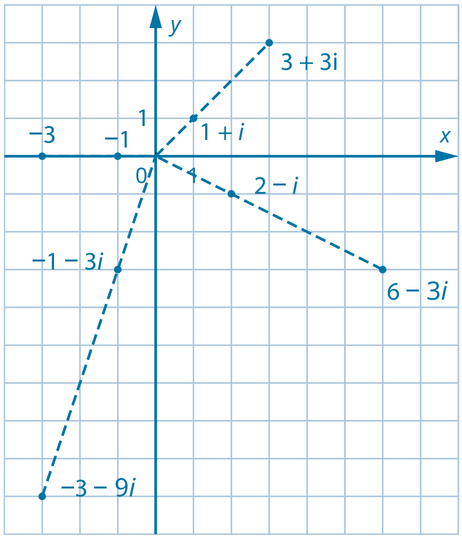
1 $z = -1$ $\quad 3 \cdot (-1) = -3$

2 $z = 1 + i$ $\quad 3 \cdot (1 + i) = 3 + 3i$

3 $z = 2 - i$ $\quad 3 \cdot (2 - i) = 6 - 3i$

4 $z = -1 - 3i$ $\quad 3 \cdot (-1 - 3i) = -3 - 9i$

b Stel de beeldpunten van z en $3 \cdot z$ voor in het complexe vlak.



c Welke transformatie beeldt het beeldpunt van een complex getal af op het beeldpunt van een reëel veelvoud van dat getal?

De vermenigvuldiging van een complex getal met een reëel getal r kan voorgesteld worden door een homothetie met factor r en de oorsprong $O(0, 0)$ als centrum.

Oefening 14 p. 131

Bereken het complexe getal $x + yi$ zodat $(2 + 3i) \cdot (x + yi) = 1$.

$$(2 + 3i) \cdot (x + yi) = 1$$

$$2x + 2yi + 3xi + 3yi^2 = 1$$

$$2x + 2yi + 3xi - 3y = 1$$

$$(2x - 3y) + (2y + 3x)i = 1$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l|l} 2x - 3y = 1 & \cdot 3 \\ 3x + 2y = 0 & \cdot (-2) \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 6x - 9y = 3 \\ -6x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcrcr} 6x & - & 9y & = & 3 \\ -6x & - & 4y & = & 0 \\ \hline 0x & - & 13y & = & 3 \end{array}$$

$$y = -\frac{3}{13}$$

$$3x + 2 \cdot \left(-\frac{3}{13}\right) = 0$$

$$3x + \left(-\frac{6}{13}\right) = 0$$

$$3x = \frac{6}{13}$$

$$x = \frac{2}{13}$$

Het gevraagde complexe getal is $\frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$.

Oefening 15 p. 131

Bereken de machten van de imaginaire eenheid, met $n \in \mathbb{N}_0$.

a
1. $i^0 = 1$
2. $i^1 = i$
3. $i^2 = -1$
4. $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$
5. $i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = 1$
6. $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$
7. $i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$
8. $i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$

b
1. $i^{4n} = 1$
2. $i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = \left(i^4\right)^n \cdot i = 1 \cdot i = i$
3. $i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = \left(i^4\right)^n \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$
4. $i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^3 = \left(i^4\right)^n \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$

c i^n met n je geboortejaar

$i^{2007} = i^{2004+3} = i^{4 \cdot 501+3} = 1 \cdot i^3 = -i$

$i^{2008} = i^{4 \cdot 502} = 1$

$i^{2009} = i^{4 \cdot 502+1} = 1 \cdot i = i$

$i^{2010} = i^{4 \cdot 502+2} = 1 \cdot i^2 = -1$

Oefening 16 p. 131

Eigenschappen van de vermenigvuldiging in $\mathbb{C}$

a De vermenigvuldiging in $\mathbb{C}$ is commutatief.

1. Noteer de eigenschap in symbolen.

$\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}: z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

2. Bewijs.

Kies twee willekeurige complexe getallen z_1 en z_2.

Stel $z_1 = a + bi$ en $z_2 = c + di$ met $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di)$

$= ac - bd + (ad + bc)i$ (1) product van complexe getallen

$z_2 \cdot z_1 = (c + di) \cdot (a + bi)$

$= ca - db + (da + cb)i$ (2) som van complexe getallen

Uit (1) en (2) volgt dat $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$. vermenigvuldiging in $\mathbb{R}$ is commutatief ■

b De vermenigvuldiging in $\mathbb{C}$ is associatief.

1 Noteer de eigenschap in symbolen.

$\forall\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}: z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$

2 Bewijs.

Kies drie willekeurige complexe getallen z_1, z_2 en z_3.

Stel $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ en $z_3 = e + fi$ met $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (a + bi) \cdot ((c + di) \cdot (e + fi))$

$= (a + bi) \cdot ((ce - df) + (cf + de)i)$ — product van complexe getallen

$= (a(ce - df) - b(cf + de)) + (a(cf + de) + b(ce - df))i$ — product van complexe getallen

$= (ace - adf - bcf - bde) + (acf + ade + bce - bdf)i$ (1) — de vermenigvuldiging is distributief t.o.v. de optelling in $\mathbb{R}$

$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = ((a + bi) \cdot (c + di)) \cdot (e + fi)$

$= ((ac - bd) + (ad + bc)i) \cdot (e + fi)$ — product van complexe getallen

$= ((ac - bd)e - (ad + bc)f) + ((ac - bd)f + (ad + bc)e)i$ — product van complexe getallen

$= (ace - bde - adf - bcf) + (acf - bdf + ade + bce)i$ (2) — de vermenigvuldiging is distributief t.o.v. de optelling in $\mathbb{R}$

Uit (1) en (2) volgt dat $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$. — optelling in $\mathbb{R}$ is commutatief ■

c 1 is het neutrale element voor de vermenigvuldiging in $\mathbb{C}$.

1 Noteer de eigenschap in symbolen.

$1 \in \mathbb{C}$ en $\forall\, z \in \mathbb{C}: z \cdot 1 = z = 1 \cdot z$

2 Bewijs.

Kies een willekeurig complex getal z.

Stel $z = a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$.

$z \cdot 1 = (a + bi) \cdot (1 + 0i)$

$= (a \cdot 1 - b \cdot 0) + (a \cdot 0 + b \cdot 1)i$ — product van complexe getallen

$= a + bi$ — 1 is het neutrale element voor de vermenigvuldiging in $\mathbb{R}$

$= z$

Analoog voor $z = 1 \cdot z$ ■

2.3 Quotiënt van twee complexe getallen

Oefening 17 p. 132

a Bereken.

1 $(-3 + 2i) \cdot (-3 - 2i)$

$= 9 - 4i^2$

$= 9 + 4$

$= 13$

2 $(4 - 9i) \cdot (4 + 9i)$

$= 16 - 81i^2$

$= 16 + 81$

$= 97$

3 $(x + yi) \cdot (x - yi)$

$= x^2 - y^2i^2$

$= x^2 + y^2$

b **1** Welk verband bestaat er tussen de factoren van elk product uit **a**?

De reële delen zijn gelijk en de imaginaire delen zijn tegengesteld.

2 Wat merk je op aan de uitkomsten?

De uitkomsten zijn reële getallen.

c **1** Met welk complex getal kun je de teller en de noemer van $\frac{1}{2 + 3i}$ vermenigvuldigen zodat de noemer reëel wordt?

$2 - 3i$

2 Voer de bewerking uit.

$$\frac{1}{2 + 3i} = \frac{1}{2 + 3i} \cdot \frac{2 - 3i}{2 - 3i}$$
$$= \frac{2 - 3i}{4 - 9i^2}$$
$$= \frac{2 - 3i}{4 + 9}$$
$$= \frac{2 - 3i}{13}$$

d
- Bereken de deling van $4 + 7i$ door $2 + 3i$ door de noemer reëel te maken.
- Noteer het resultaat in de vorm $a + bi$.

$$\frac{4 + 7i}{2 + 3i} = \frac{4 + 7i}{2 + 3i} \cdot \frac{2 - 3i}{2 - 3i}$$
$$= \frac{8 - 12i + 14i - 21i^2}{13}$$
$$= \frac{8 - 12i + 14i + 21}{13}$$
$$= \frac{29 + 2i}{13}$$
$$= \frac{29}{13} + \frac{2}{13}i$$

Oefening 18 p. 134

- Bereken.
- Controleer met ICT.

a $(6 + 8i)\,(\overline{3 - 2i}\,)$

$$(6 + 8i)\,(\overline{3 - 2i}) = (6 + 8i)(3 + 2i)$$
$$= 18 + 12i + 24i + 16i^2$$
$$= 2 + 36i$$

b $\dfrac{1}{12 + 5i}$

$$\frac{1}{12+5i} = \frac{1}{12+5i} \cdot \frac{12-5i}{12-5i}$$
$$= \frac{12-5i}{144-25i^2}$$
$$= \frac{12-5i}{169}$$
$$= \frac{12}{169} - \frac{5}{169}i$$

c $5 \cdot (\overline{4 - 3i}\,)^{-1}$

$$5 \cdot (\overline{4-3i})^{-1} = 5 \cdot \frac{1}{4+3i} \cdot \frac{4-3i}{4-3i}$$
$$= 5 \cdot \frac{4-3i}{16-9i^2}$$
$$= \cancel{5} \cdot \frac{4-3i}{\cancel{25}_5}$$
$$= \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$$

d $\dfrac{1 - i}{1 + i}$

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}$$
$$= \frac{\cancel{1} - 2i \cancel{+ i^2}}{1-i^2}$$
$$= \frac{-2i}{2}$$
$$= -i$$

e $\dfrac{3 - i}{5i}$

$$\frac{3-i}{5i} = \frac{3-i}{5i} \cdot \frac{i}{i}$$
$$= \frac{3i-i^2}{5i^2}$$
$$= \frac{1+3i}{-5}$$
$$= -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$$

f $\dfrac{7 - i}{1 + i} - \dfrac{4}{i}$

$$\frac{7-i}{1+i} - \frac{4}{i} = \frac{7-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} - \frac{4}{i} \cdot \frac{i}{i}$$
$$= \frac{7-7i-i+i^2}{1+1} - \frac{4i}{i^2}$$
$$= \frac{6-8i}{2} + 4i$$
$$= 3$$

Oefening 19 p. 134

Bewijs.
$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

Kies twee willekeurige complexe getallen z_1 en z_2.

Stel $z_1 = a + bi$ en $z_2 = c + di$ met $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{(a + bi) + (c + di)}$

$= \overline{(a + c) + (b + d)\,i}$ — som van complexe getallen

$= (a + c) - (b + d)\,i$ (1) — definitie complex toegevoegde

$\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{a + bi} + \overline{c + di}$

$= (a - bi) + (c - di)$ — definitie complex toegevoegde

$= (a + c) + (-b - d)\,i$ (2) — som van complexe getallen

Uit (1) en (2) volgt dat $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$. — haakjesregel ■

Oefening 20 p. 134

Bewijs de eigenschappen.

a De som van een complex getal en zijn complexe toegevoegde is een reëel getal.
In symbolen: $\forall z \in \mathbb{C} : z + \bar{z} \in \mathbb{R}$

Kies een willekeurig complex getal z.

Stel $z = a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$.

Dan is $\bar{z} = a - bi$.

$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi)$

$= (a + a) + (b - b)\,i$ som van complexe getallen

$= 2a$

Omdat $2a$ een reëel getal is, is $z + \bar{z} \in \mathbb{R}$.

b Het product van een complex getal en zijn complexe toegevoegde is een reëel getal.
In symbolen: $\forall z \in \mathbb{C} : z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$

Kies een willekeurig complex getal z.

Stel $z = a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$.

Dan is $\bar{z} = a - bi$.

$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi)$

$= a^2 - b^2 i^2$ merkwaardig product

$= a^2 + b^2$

Omdat $a^2 + b^2$ een reëel getal is, is $z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$. ■

2.4 Tweedegraadsvergelijkingen met reële coëfficiënten oplossen in $\mathbb{C}$

Oefening 21 p. 135

a Toon aan dat het kwadraat van $5i$ en $-5i$ gelijk is aan -25.

$(5i)^2 = 25i^2 = 25 \cdot (-1) = -25$

$(-5i)^2 = 25i^2 = 25 \cdot (-1) = -25$

b Van welke twee complexe getallen is -121 het kwadraat? Verklaar.

$11i$ en $-11i$

$(11i)^2 = 121i^2 = 121 \cdot (-1) = -121$

$(-11i)^2 = 121i^2 = 121 \cdot (-1) = -121$

c Van welke twee complexe getallen is -75 het kwadraat? Verklaar.

$\sqrt{75}i$ en $-\sqrt{75}i$

$\left(\sqrt{75}i\right)^2 = 75 \cdot i^2 = 75 \cdot (-1) = -75$

$\left(-\sqrt{75}i\right)^2 = 75 \cdot i^2 = 75 \cdot (-1) = -75$

Oefening 22 p. 135

Gegeven is de tweedegraadsvergelijking $x^2 - 6x + 10 = 0$.

a Los de vergelijking op in $\mathbb{R}$.

$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = -4$

De vergelijking heeft geen reële oplossingen.

b Van welke twee complexe getallen is de discriminant uit **a** het kwadraat?

$2i$ en $-2i$

$(2i)^2 = 4i^2 = 4 \cdot (-1) = -4$

$(-2i)^2 = 4i^2 = 4 \cdot (-1) = -4$

c Los de vergelijking verder op in $\mathbb{C}$. Maak gebruik van de discriminantmethode.

$x = \dfrac{6+2i}{2}$ of $x = \dfrac{6-2i}{2}$

$x = 3 + i$ of $x = 3 - i$

ICT **d** Controleer of je gevonden waarden de oplossingen zijn van de vergelijking.

$(3+i)^2 - 6(3+i) + 10 = 0$

$(3-i)^2 - 6(3-i) + 10 = 0$

Oefening 23 p. 136

Los de vergelijking op in $\mathbb{C}$.

a $4z^2 - 4z + 5 = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$= (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5$

$= -64$

De vierkantswortels uit -64 zijn $8i$ en $-8i$.

Kies $v = 8i$.

$z = \frac{-b+v}{2a}$ of $z = \frac{-b-v}{2a}$

$z = \frac{4+8i}{2 \cdot 4}$ of $z = \frac{4-8i}{2 \cdot 4}$

$z = \frac{4+8i}{8}$ of $z = \frac{4-8i}{8}$

$z = \frac{1}{2} + i$ of $z = \frac{1}{2} - i$

b $z^2 + 16 = 0$

$z^2 = -16$

$z = 4i$ of $z = -4i$

c $6z^2 - z - 1 = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$= (-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1)$

$= 25$

$z = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ of $z = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$

$z = \frac{1+\sqrt{25}}{2 \cdot 6}$ of $z = \frac{1-\sqrt{25}}{2 \cdot 6}$

$z = \frac{1+5}{12}$ of $z = \frac{1-5}{12}$

$z = \frac{1}{2}$ of $z = -\frac{1}{3}$

d $-2z^2 - 16z - 33 = 0$

$2z^2 + 16z + 33 = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$= 16^2 - 4 \cdot 2 \cdot 33$

$= -8$

De vierkantswortels uit -8 zijn $\sqrt{8}i$ en $-\sqrt{8}i$.

Kies $v = \sqrt{8}i$.

$z = \frac{-b+v}{2a}$ of $z = \frac{-b-v}{2a}$

$z = \frac{-16+\sqrt{8}i}{2 \cdot 2}$ of $z = \frac{-16-\sqrt{8}i}{2 \cdot 2}$

$z = \frac{-16+2\sqrt{2}i}{4}$ of $z = \frac{-16-2\sqrt{2}i}{4}$

$z = -4 + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ of $z = -4 - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

e $4z^2 - 12z + 9 = 0$

methode 1:

$D = b^2 - 4ac$

$= (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9$

$= 0$

$z = \frac{-b}{2a}$

$z = \frac{12}{2 \cdot 4}$

$z = \frac{12}{8}$

$z = \frac{3}{2}$

methode 2:

$(2z-3)^2 = 0$

$2z - 3 = 0$

$2z = 3$

$z = \frac{3}{2}$

Oefening 24 p. 136

a Los de vergelijking op in $\mathbb{C}$.

1 $z^2 + 2z + 5 = 0$

$$D = b^2 - 4ac$$
$$= 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5$$
$$= -16$$

De vierkantswortels uit -16 zijn $4i$ en $-4i$.

$v = 4i$

$z = \dfrac{-b+v}{2a}$ of $z = \dfrac{-b-v}{2a}$

$z = \dfrac{-2+4i}{2 \cdot 1}$ of $z = \dfrac{-2-4i}{2 \cdot 1}$

$z = \dfrac{-2+4i}{2}$ of $z = \dfrac{-2-4i}{2}$

$z = -1 + 2i$ of $z = -1 - 2i$

2 $2z^2 - 12z + 68 = 0$

$z^2 - 6z + 34 = 0$

$$D = b^2 - 4ac$$
$$= (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 34$$
$$= -100$$

De vierkantswortels uit -100 zijn $10i$ en $-10i$.

$v = 10i$

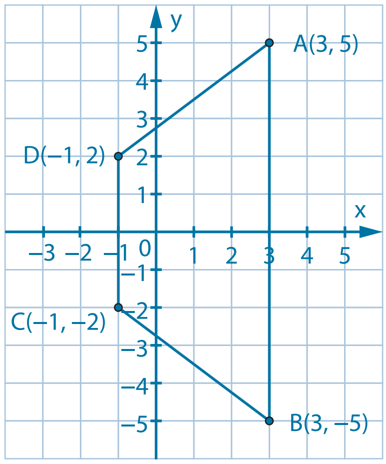
$z = \dfrac{-b+v}{2a}$ of $z = \dfrac{-b-v}{2a}$

$z = \dfrac{6+10i}{2 \cdot 1}$ of $z = \dfrac{6-10i}{2 \cdot 1}$

$z = \dfrac{6+10i}{2}$ of $z = \dfrac{6-10i}{2}$

$z = 3 + 5i$ of $z = 3 - 5i$

b Teken de beeldpunten van de oplossingen uit **a** in het vlak van Gauss.



c Vergelijk de beeldpunten van de oplossingen van elke vergelijking met elkaar. Hoe liggen deze beeldpunten ten opzichte van elkaar?

Per vergelijking zijn de beeldpunten van de oplossingen elkaars spiegelbeeld door een spiegeling om de reële as.

d De punten uit **b** vormen een vierhoek. Bereken de omtrek van die vierhoek.

$|AB| = 5 - (-5) = 10$

$|BC| = \sqrt{(3-(-1))^2 + (-5-(-2))^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$|CD| = 2 - (-2) = 4$

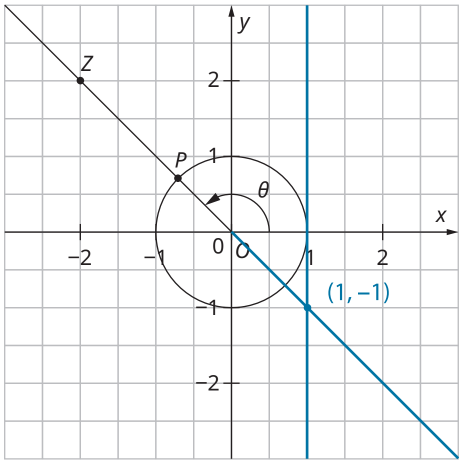
$|DA| = \sqrt{(-1-3))^2 + (2-5)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

$P = 10 + 5 + 4 + 5 = 24$

3 Goniometrische vorm van een complex getal

3.1 Goniometrische vorm van een complex getal

Oefening 25 p. 137



a Het punt Z is het beeldpunt van een complex getal z. Noteer het complexe getal z in de cartesische vorm.

$z = -2 + 2i$

b Vector $\vec{Z}$ is een reëel veelvoud van vector $\vec{P}$, waarbij P op de goniometrische cirkel ligt: $\vec{Z} = r \cdot \vec{P}$.

1 Laat met een berekening zien dat $r = \sqrt{8}$.

$r = |OZ| = \sqrt{(0-(-2))^2 + (0-2)^2} = \sqrt{8}$

2 Laat met een berekening zien dat $\theta = 135°$.

$\tan\theta = \text{rico } OZ = -1$

$\theta = -45°$ of $\theta = -45° + 180° = 135°$

Het beeldpunt van θ ligt in het tweede kwadrant, dus $\theta = 135°$.

3 Verklaar waarom $\text{co}(Z) = \left(\sqrt{8} \cdot \cos 135°, \sqrt{8} \cdot \sin 135°\right)$.

$\text{co}(\vec{P}) = \text{co}(P) = (\cos 135°, \sin 135°)$

Omdat $\vec{Z} = \sqrt{8} \cdot \vec{P}$ is $\text{co}(\vec{Z}) = \sqrt{8} \cdot \text{co}(\vec{P}) = \left(\sqrt{8} \cdot \cos 135°, \sqrt{8} \cdot \sin 135°\right) = \text{co}(Z)$.

4 Noteer het complexe getal z met behulp van de coördinaat van Z uit **3**.

$z = \left(\sqrt{8} \cdot \cos 135°\right) + \left(\sqrt{8} \cdot \sin 135°\right)i$

5 Zonder de gemeenschappelijke factor bij deze notatie af.

$z = \sqrt{8}(\cos 135° + i \sin 135°)$

Oefening 26 p. 140

- Noteer de complexe getallen in de cartesische vorm.
- Rond indien nodig af op 2 decimalen.

ICT

a $5(\cos 180° + i \sin 180°)$

$= -5$

b $4(\cos 25° + i \sin 25°)$

$\approx 3{,}63 + 1{,}69i$

c $3(\cos 30° + i \sin 30°)$

$= \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

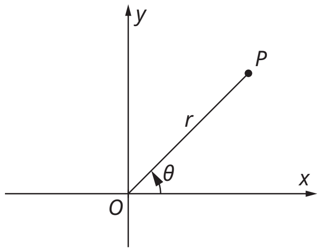
d $\sqrt{2}(\cos(-125°) + i \sin(-125°))$

$\approx -0{,}81 - 1{,}16i$

Oefening 27 p. 140

Noteer de complexe getallen in de goniometrische vorm.

a $4 + 3i$



$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

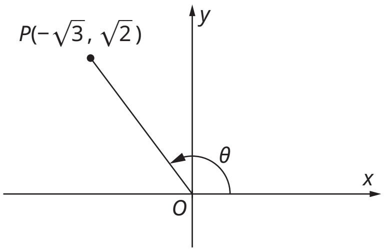
$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$

$\theta = 36{,}869\ldots° \approx 36°52'12''$ of $\theta = 36{,}869\ldots° + 180° = 216{,}869\ldots° \approx 216°52'12''$

Het beeldpunt van z ligt in het eerste kwadrant, dus $\theta \approx 36°52'12''$.

$4 + 3i \approx 5(\cos 36°52'12'' + i \sin 36°52'12'')$

b $-\sqrt{3} + i\sqrt{2}$



$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{5}$

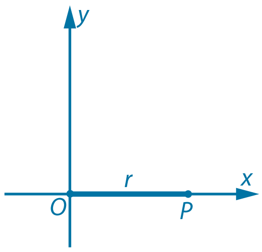
$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{3}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\theta = -39{,}231\ldots° \approx -39°13'53''$
of $\theta = -39{,}231\ldots° + 180° = 140{,}768\ldots° \approx 140°46'7''$

Het beeldpunt van z ligt in het tweede kwadrant, dus $\theta \approx 140°46'7''$.

$-\sqrt{3} + i\sqrt{2} = \sqrt{5}(\cos 140°46'7'' + i \sin 140°46'7'')$

c 6



$r = |a| = |6| = 6$

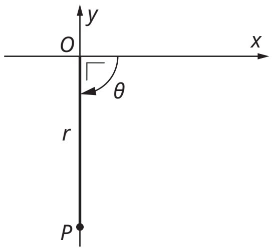
of

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + 6^2} = 6$

$\theta = 0°$

$6 = 6(\cos 0° + i \sin 0°)$

d $-5i$



$r = |b| = |-5| = 5$

of

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5$

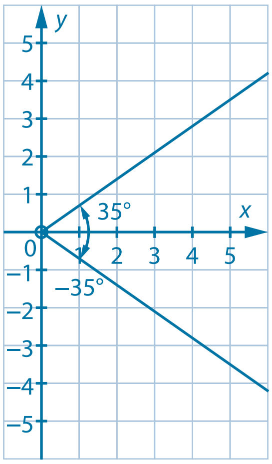
$\theta = -90°$

$-5i = 5(\cos(-90°) + i \sin(-90°))$

Oefening 28 p. 140

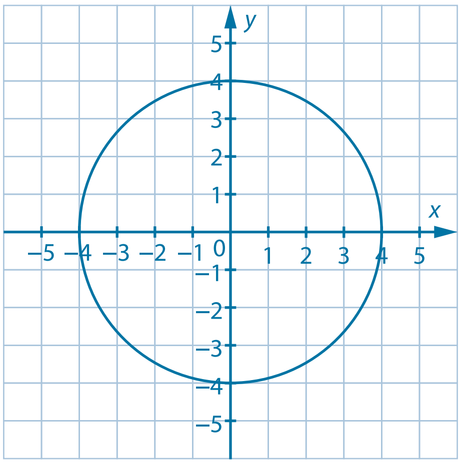
Teken in het complexe vlak de beeldpunten van alle complexe getallen *z* die voldoen aan de voorwaarde.

a $|\theta| = 35°$



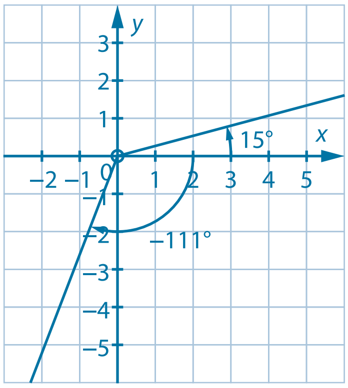
Alle punten op beide halfrechten voldoen aan de voorwaarde.

b $r = 4$



Alle punten op de cirkel voldoen aan de voorwaarde.

c $|\theta + 48°| = 63°$



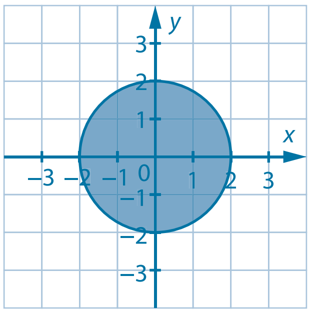
$\theta + 48° = 63°$ of $\theta + 48° = -63°$ $|a| = b$

$a = b$ of $a = -b$

$\theta = 15°$ of $\theta = -111°$

Alle punten op beide halfrechten voldoen aan de voorwaarde.

d $r \leqslant 2$



Alle punten op en binnen de cirkel voldoen aan de voorwaarde.

Oefening 29 p. 140

Noteer de complexe getallen in de goniometrische vorm.

a $2(\cos 35° - i \sin 35°)$

$= 2(\cos(-35°) + i \sin(-35°))$ tegengestelde hoeken: $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ en $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

b $3(-\cos 72° + i \sin 72°)$

$= 3(\cos 108° + i \sin 108°)$ supplementaire hoeken: $\sin(180° - \alpha) = \sin \alpha$ en $\cos(180° - \alpha) = -\cos \alpha$

3.2 Product van twee complexe getallen in de goniometrische vorm

Oefening 30 p. 140

Gegeven zijn de complexe getallen z_1 en z_2.

$z_1 = \cos 70° + i \sin 70°$
$z_2 = \cos 40° + i \sin 40°$

Bereken $z_1 \cdot z_2 = (\cos 70° + i \sin 70°) \cdot (\cos 40° + i \sin 40°)$ met behulp van de deelvragen.

a Werk de haakjes uit en herleid.

$= \cos 70° \cdot \cos 40° + \cos 70° \cdot i \sin 40° + i \sin 70° \cdot \cos 40° + i \sin 70° \cdot i \sin 40°$

$= \cos 70° \cdot \cos 40° + i \cdot \cos 70° \cdot \sin 40° + i \cdot \sin 70° \cdot \cos 40° - \sin 70° \cdot \sin 40°$

b Noteer het reële deel en het imaginaire deel.

reëel deel: $\cos 70° \cdot \cos 40° - \sin 70° \cdot \sin 40°$

imaginair deel: $\cos 70° \cdot \sin 40° + \sin 70° \cdot \cos 40°$

c Vereenvoudig beide delen door gebruik te maken van de somformules van goniometrie.

reëel deel: $\cos(70° + 40°) = \cos 110°$

imaginair deel: $\sin(70° + 40°) = \sin 110°$

d Noteer de goniometrische vorm van het product uit **a**.

$\cos 110° + i \cdot \sin 110°$

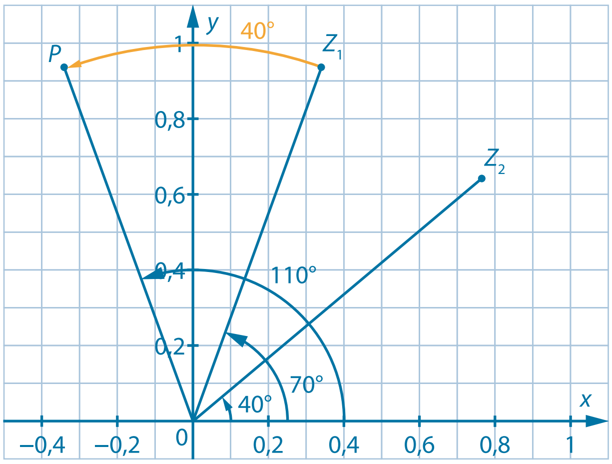
e Wat stel je vast in verband met de argumenten van z_1, z_2 en $z_1 \cdot z_2$?

$70° + 40° = 110°$

Een argument van $z_1 \cdot z_2$ is gelijk aan de som van de argumenten van z_1 en z_2.

f Stel z_1, z_2 en $z_1 \cdot z_2$ voor in het complexe vlak. Welke transformatie(s) ondergaat het beeldpunt van z_1 na vermenigvuldiging met z_2?

Stel Z_1, Z_2 en P de beeldpunten van respectievelijk z_1, z_2 en $z_1 \cdot z_2$. Als je z_1 vermenigvuldigt met z_2 dan wordt het beeldpunt van z_1 in het complexe vlak gedraaid over een hoek van $\theta_2 = 40°$ rond de oorsprong O.



Oefening 31 p. 141

Gegeven zijn de complexe getallen z_1 en z_2.

$z_1 = 2\,(\cos 80° + i \sin 80°)$

$z_2 = 3\,(\cos 50° + i \sin 50°)$

Bereken $z_1 \cdot z_2 = 2(\cos 80° + i \sin 80°) \cdot 3(\cos 50° + i \sin 50°)$ met behulp van de deelvragen.

a Werk de haakjes uit en herleid.

$= 6(\cos 80° \cdot \cos 50° + \cos 80° \cdot i \sin 50° + i \sin 80° \cdot \cos 50° + i \sin 80° \cdot i \sin 50°)$

$= 6(\cos 80° \cdot \cos 50° + i \cdot \cos 80° \cdot \sin 50° + i \cdot \sin 80° \cdot \cos 50° - \sin 80° \cdot \sin 50°)$

b Noteer het reële deel en het imaginaire deel.

reëel deel: $6(\cos 80° \cdot \cos 50° - \sin 80° \cdot \sin 50°)$

imaginair deel: $6(\cos 80° \cdot \sin 50° + \sin 80° \cdot \cos 50°)$

c Vereenvoudig beide delen door gebruik te maken van de somformules van goniometrie.

reëel deel: $6 \cos(80° + 50°) = 6 \cos 130°$

imaginair deel: $6 \sin(80° + 50°) = 6 \sin 130°$

d Noteer de goniometrische vorm van het product uit **a**.

$6(\cos 130° + i \cdot \sin 130°)$

e Wat stel je vast in verband met de argumenten van z_1, z_2 en $z_1 \cdot z_2$?

$80° + 50° = 130°$

Een argument van $z_1 \cdot z_2$ is gelijk aan de som van de argumenten van z_1 en z_2.

f Wat stel je vast in verband met de moduli van z_1, z_2 en $z_1 \cdot z_2$?

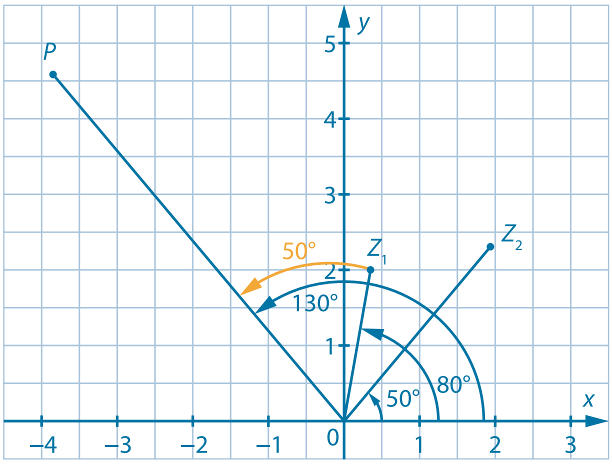
$2 \cdot 3 = 6$

De modulus van $z_1 \cdot z_2$ is gelijk aan het product van de moduli van z_1 en z_2.

g Stel z_1, z_2 en $z_1 \cdot z_2$ voor in het complexe vlak. Welke transformatie(s) ondergaat het beeldpunt van z_1 na vermenigvuldiging met z_2?

Stel Z_1, Z_2 en P de beeldpunten van respectievelijk z_1, z_2 en $z_1 \cdot z_2$. Het beeldpunt van het product van z_1 en z_2 is het beeld van het beeldpunt van z_1

- door een draaiing over een hoek van $\theta_2 = 50°$ rond de oorsprong O
- en door een homothetie met centrum O en factor $r_2 = 3$.



Oefening 32 p. 142

Bereken $z_1 \cdot z_2$.

a $z_1 = 5\,(\cos 65° + i \sin 65°)$ en $z_2 = 2\,(\cos 15° + i \sin 15°)$

$z_1 \cdot z_2 = 5 \cdot 2(\cos(65° + 15°) + i \sin(65° + 15°))$

$= 10(\cos 80° + i \sin 80°)$

b $z_1 = 3\,(\cos 140° + i \sin 140°)$ en $z_2 = 4\,(\cos 110° + i \sin 110°)$

$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 4(\cos(140° + 110°) + i \sin(140° + 110°))$

$= 12(\cos 250° + i \sin 250°)$

c $z_1 = \sqrt{3}(\cos 40° + i \sin 40°)$ en $z_2 = \sqrt{27}(\cos 153° + i \sin 153°)$

$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{27}(\cos(40° + 153°) + i \sin(40° + 153°))$

$= \sqrt{81}(\cos 193° + i \sin 193°)$

$= 9(\cos 193° + i \sin 193°)$

d $z_1 = 3\,(\cos 87° + i \sin 87°)$ en $z_2 = \sqrt{7}(\cos 36° + i \sin 36°)$

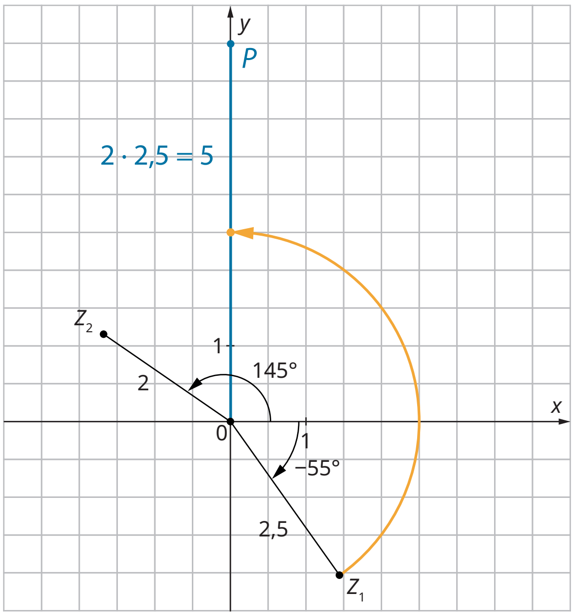
$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot \sqrt{7}(\cos(87° + 36°) + i \sin(87° + 36°))$

$= 3\sqrt{7}(\cos 123° + i \sin 123°)$

Oefening 33 p. 142

Z_1 en Z_2 zijn de beeldpunten van de complexe getallen z_1 en z_2. Teken het beeldpunt *P* van het product van deze complexe getallen.

Je draait het beeldpunt over een hoek van 145° en voert een homothetie uit met factor 2.



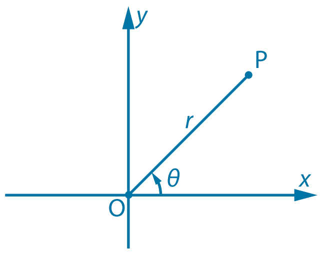
Oefening 34 p. 142

P is het beeldpunt van $z = 1 + i$. Bereken over welke hoek het lijnstuk [*OP*] gedraaid wordt als *z* achtereenvolgens vermenigvuldigd wordt met $\sqrt{3} + i$, $-i$ en $-2 + 2i$.

$z_1 = \sqrt{3} + i$: $\tan\theta_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\theta_1 = 30°$ of $\theta_1 = 30° + 180° = 210°$

Het beeldpunt van z_1 ligt in het eerste kwadrant, dus $\theta_1 = 30°$.

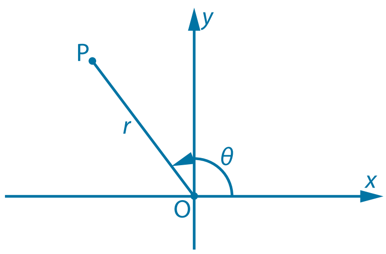


$z_2 = -i$: $\theta_2 = -90°$

$z_3 = -2 + 2i$: $\tan\theta_3 = \dfrac{2}{-2} = -1$

$\theta_1 = -45°$ of $\theta_1 = -45° + 180° = 135°$

Het beeldpunt van z_3 ligt in het tweede kwadrant, dus $\theta_3 = 135°$.



$30° + (-90°) + 135° = 75°$

Het lijnstuk [OP] wordt gedraaid over een hoek van 75°.

3.3 Quotiënt van twee complexe getallen in de goniometrische vorm

Oefening 35 p. 143

Gegeven zijn de complexe getallen z_1 en z_2.

$z_1 = 6\,(\cos 145° + i \sin 145°)$

$z_2 = 2\,(\cos 65° + i \sin 65°)$

Bereken $\frac{z_1}{z_2}$ met behulp van de deelvragen.

Je wilt z_1 delen door z_2, dus moet je z_1 vermenigvuldigen met het omgekeerde van z_2.

a Stel $z_2^{-1} = r\,(\cos\theta + i \sin\theta)$. Dan is $2\,(\cos 65° + i \sin 65°) \cdot r\,(\cos\theta + i \sin\theta) = 1$.

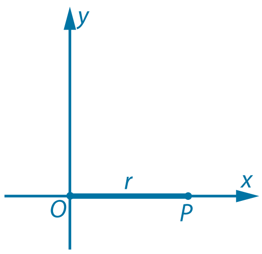
1 Bereken het product in het linkerlid.

$2(\cos 65° + i \sin 65°) \cdot r(\cos\theta + i \sin\theta)$

$= 2 \cdot r(\cos(65° + \theta) + i \sin(65° + \theta))$

2 Noteer het rechterlid in de goniometrische vorm.

$r = 1$ en $\theta = 0°$



$1 = 1(\cos 0° + i \sin 0°) = \cos 0° + i \sin 0°$

3 Bereken r en θ.

$2 \cdot r(\cos(65° + \theta) + i \sin(65° + \theta)) = 1(\cos 0° + i \sin 0°)$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 2r = 1 \\ 65° + \theta = 0° \end{cases}$$

$r = \frac{1}{2}$ en $\theta = -65°$

4 Noteer het omgekeerde van z_2 in de goniometrische vorm.

$z_2^{-1} = \frac{1}{2}(\cos(-65°) + i \sin(-65°))$

b **1** Bereken $\frac{z_1}{z_2}$.

$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$

$= (6(\cos 145° + i \sin 145°)) \cdot \left(\frac{1}{2}(\cos(-65°) + i \sin(-65°))\right)$

$= 6 \cdot \frac{1}{2}(\cos(145° - 65°) + i \sin(145° - 65°))$

$= 3(\cos 80° + i \sin 80°)$

2 Wat stel je vast in verband met de argumenten van z_1, z_2 en $\frac{z_1}{z_2}$?

$145° - 65° = 80°$

Het argument van $\frac{z_1}{z_2}$ is gelijk aan het verschil van de argumenten van z_1 en z_2.

3 Wat stel je vast in verband met de moduli van z_1, z_2 en $\frac{z_1}{z_2}$?

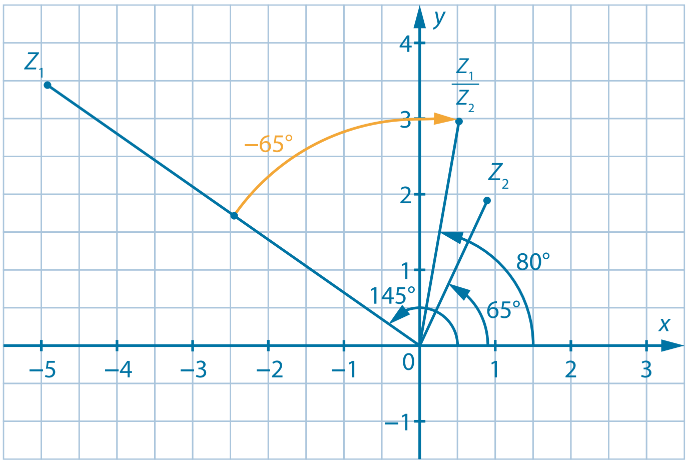
$\frac{6}{2} = 3$

De modulus van $\frac{z_1}{z_2}$ is gelijk aan het quotiënt van de moduli van z_1 en z_2.

c Welke transformatie(s) ondergaat het beeldpunt van z_1 na deling door z_2? Controleer met ICT.

Het beeldpunt van het quotiënt van z_1 en z_2 is het beeld van het beeldpunt van z_1

- door een draaiing over een hoek van $-\theta_2 = -65°$ rond de oorsprong O
- en door een homothetie met centrum O en factor $\frac{1}{r_2} = \frac{1}{2}$.



Oefening 36 p. 144

Bereken $\frac{z_1}{z_2}$.

a $z_1 = 4(\cos(-35°) + i\sin(-35°))$ en $z_2 = 2(\cos(-55°) + i\sin(-55°))$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{2}(\cos(-35° + 55°) + i\sin(-35° + 55°))$$

$$= 2(\cos 20° + i\sin 20°)$$

b $z_1 = 5(\cos 85° + i\sin 85°)$ en $z_2 = 6(\cos 178° + i\sin 178°)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{6}(\cos(85° - 178°) + i\sin(85° - 178°))$$

$$= \frac{5}{6}(\cos(-93°) + i\sin(-93°))$$

c $z_1 = \sqrt{5}(\cos 36° + i\sin 36°)$ en $z_2 = 8(\cos 107° + i\sin 107°)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{5}}{8}(\cos(36° - 107°) + i\sin(36° - 107°))$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{8}(\cos(-71°) + i\sin(-71°))$$

d $z_1 = \sqrt{72}(\cos(-72°) + i\sin(-72°))$ en $z_2 = \sqrt{2}(\cos(-43°) + i\sin(-43°))$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}(\cos(-72° + 43°) + i\sin(-72° + 43°))$$

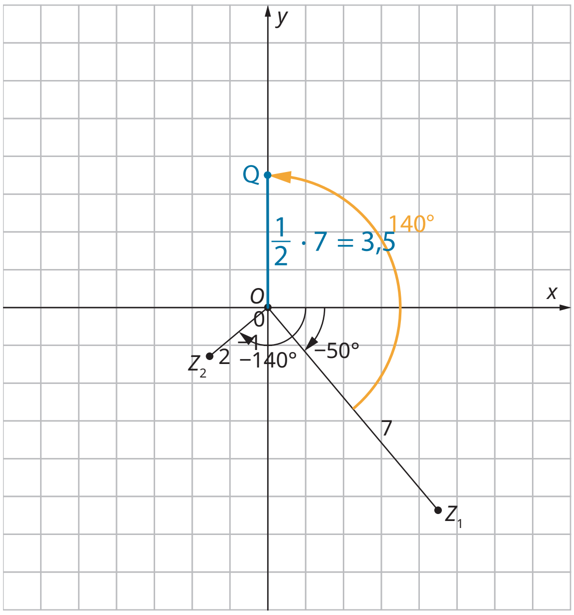
$$= \sqrt{36}(\cos(-29°) + i\sin(-29°))$$

$$= 6(\cos(-29°) + i\sin(-29°))$$

Oefening 37 p. 144

Z_1 en Z_2 zijn de beeldpunten van de complexe getallen z_1 en z_2.

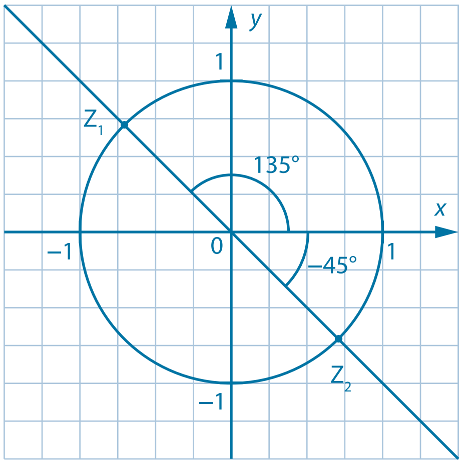
Teken het beeldpunt Q van het quotiënt $\frac{z_1}{z_2}$ van deze complexe getallen.



Je draait het beeldpunt over een hoek van 140° en voert een homothetie uit met factor $\frac{1}{2}$.

Oefening 38 p. 144

Gegeven zijn twee complexe getallen z_1 en z_2 waarvan de beeldpunten Z_1 en Z_2 de snijpunten zijn van de goniometrische cirkel met de bissectrice van het tweede en vierde kwadrant. Bereken de coördinaat van het beeldpunt van $\frac{z_1}{z_2}$.



De beeldpunten Z_1 en Z_2 liggen op de goniometrische cirkel.

De modulus van z_1 en van z_2 is dus gelijk aan 1.

De rechte Z_1Z_2 is de bissectrice van het tweede kwadrant.

De argumenten van z_1 en z_2 zijn dus gelijk aan 135° en −45°.

$z_1 = \cos 135° + i \sin 135°$ en $z_2 = \cos(-45°) + i \sin(-45°)$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \cos(135° - (-45°)) + i \sin(135° - (-45°)) \\ &= \cos 180° + i \sin 180° \\ &= -1 + i \cdot 0 \\ &= -1 \end{aligned}$$

De coördinaat van het beeldpunt van $\frac{z_1}{z_2}$ is $(-1, 0)$.

Opdrachten

1 Van reële naar complexe getallen

reeks 1

Oefening 39 p. 148

Antwoord met een getal.
Kies uit: $-1 + 6i$, $\sqrt{7}$, 2, -53, $\frac{9}{48}$

- **a** een geheel getal dat geen natuurlijk getal is -53
- **b** een rationaal getal dat geen geheel getal is $\frac{9}{48}$
- **c** een reëel getal dat geen rationaal getal is $\sqrt{7}$
- **d** en complex getal dat geen reëel getal is $-1 + 6i$

Oefening 40 p. 148

Welke getallen stellen *a*, *b*, *c*, *d* en *e* voor?
Kies uit: $\frac{1}{2}$, -3, 4, $\sqrt{5}$, $6 + 7i$

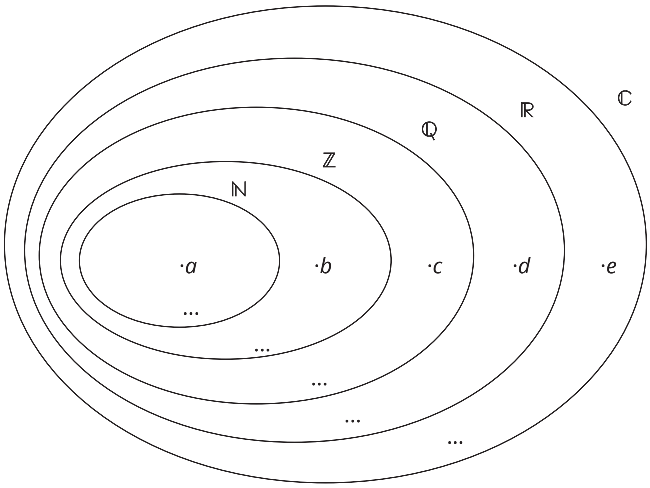
$a = 4$

$b = -3$

$c = \frac{1}{2}$

$d = \sqrt{5}$

$e = 6 + 7i$



Oefening 41 p. 148

Noteer telkens het reële deel en het imaginaire deel.

a $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Het reële deel is $\frac{\sqrt{3}}{2}$ en het imaginaire deel is $-\frac{1}{2}$.

b $-i + \sqrt{13}$

Het reële deel is $\sqrt{13}$ en het imaginaire deel is -1.

c 3

Het reële deel is 3 en het imaginaire deel is 0.

d $5i$

Het reële deel is 0 en het imaginaire deel is 5.

Oefening 42 p. 148

Gegeven is de coördinaat van het beeldpunt van een complex getal.
Noteer het getal in de cartesische vorm.

a $(-4, 1)$

$-4 + i$

b $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$

$\frac{2}{3} + \frac{3}{2}i$

c $(2, 0)$

2

d $(0, 37)$

$37i$

Oefening 43 p. 149

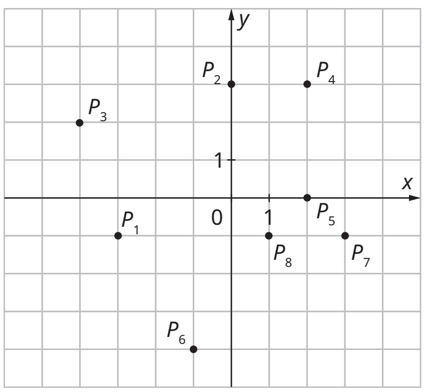
Vul de tabel aan.

complex getal	reële deel	imaginaire deel
$13 - 17i$	13	-17
πi	0	π
$-1 - i$	-1	-1
$\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}i$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{2}{7} + \frac{9}{7}i$	$\frac{2}{7}$	$\frac{9}{7}$
4	4	0

reeks 2

Oefening 44 p. 149

P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 en P_8 zijn de beeldpunten van de complexe getallen z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7 en z_8.
Noteer de complexe getallen in de cartesische vorm.



$z_1 = -3 - i$

$z_2 = 3i$

$z_3 = -4 + 2i$

$z_4 = 2 + 3i$

$z_5 = 2$

$z_6 = -1 - 4i$

$z_7 = 3 - i$

$z_8 = 1 - i$

Oefening 45 p. 149

Teken de beeldpunten van de complexe getallen in het complexe vlak.

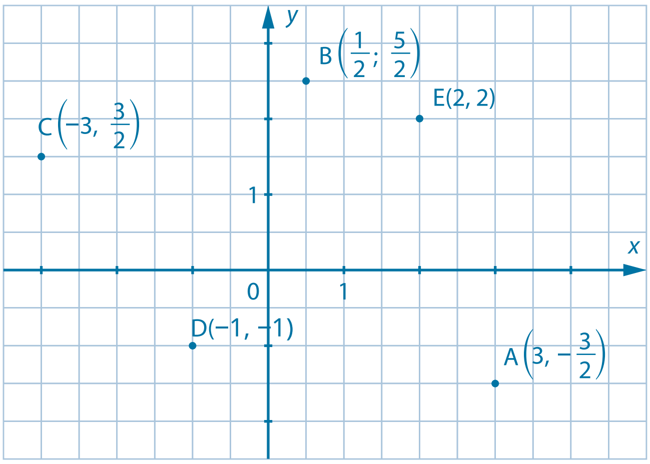
A is het beeldpunt van $3 - \frac{3}{2}i$

B is het beeldpunt van $\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$

C is het beeldpunt van $-3 + \frac{3}{2}i$

D is het beeldpunt van $-1 - i$

E is het beeldpunt van $2 + 2i$



Oefening 46 p. 149

Voor welke waarden van v en w zijn z_1 en z_2 gelijke complexe getallen?

a $z_1 = (-v + 2) + (w - 7)i$
$z_2 = (-4 + v) + (-w + 3)i$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -v + 2 = -4 + v \\ w - 7 = -w + 3 \end{cases}$$

$-v + 2 = -4 + v$

$-2v = -6$

$v = 3$

$w - 7 = -w + 3$

$2w = 10$

$w = 5$

z_1 en z_2 zijn gelijke complexe getallen als $v = 3$ en $w = 5$.

b $z_1 = v + (w - 3)i$

$z_2 = (2w - 1) + (v + 1)i$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 2w - 1 \\ w - 3 = v + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 2w - 1 \\ w - 3 = v + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 2w - 1 \\ w - 3 = 2w - 1 + 1 \end{cases}$$

$$w - 3 = 2w$$

$$w = -3$$

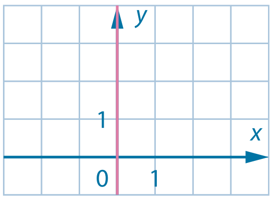
$$\begin{aligned} v &= 2w - 1 \\ &= 2(-3) - 1 \\ &= -7 \end{aligned}$$

z_1 en z_2 zijn gelijke complexe getallen als $w = -3$ en $v = -7$

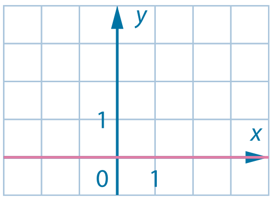
Oefening 47 p. 149

Teken in het complexe vlak de verzameling van de beeldpunten van alle complexe getallen z

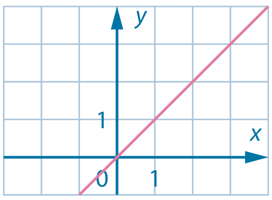
a waarvan het reële deel 0 is.



b waarvan het imaginaire deel 0 is.



c waarvan het reële deel en het imaginaire deel gelijk zijn.



Oefening 48 p. 150

Vul aan.

a De beeldpunten van alle complexe getallen waarvan het imaginaire deel gelijk is, vormen in het complexe vlak een horizontale rechte

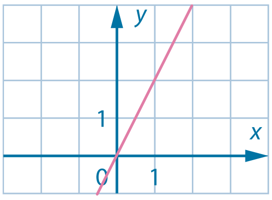
b De beeldpunten van alle complexe getallen waarvan het reële deel gelijk is, vormen in het complexe vlak een verticale rechte

Oefening 49 p. 150

Teken in het complexe vlak de beeldpunten van alle getallen $a + bi$ die voldoen aan:

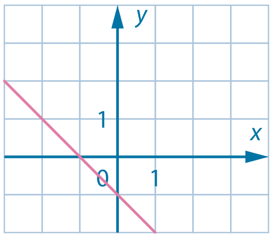
a $b = 2a$

Dit is de vergelijking van een rechte met rico = 2 die door de oorsprong gaat. Alle beeldpunten van de getallen die aan de voorwaarde voldoen, liggen op de rechte met vergelijking $b = 2a$.



b $a + b = -1$

Je kunt de vergelijking omvormen naar $b = -a - 1$. Dat is de vergelijking van een rechte met rico = −1 die de y-as snijdt in P(0, −1). Alle beeldpunten van de getallen die aan deze voorwaarde voldoen, liggen op de rechte met vergelijking $b = -a - 1$.



Oefening 50 p. 150

Op de planeet Quaternion rekent men met onze reële getallen en de gewone vermenigvuldiging, maar ook nog met drie symbolen i, j en k die op de volgende manier worden vermenigvuldigd:

$i \cdot i = -1$ $\quad$ $j \cdot j = -1$ $\quad$ $k \cdot k = -1$ $\quad$ $i \cdot j = k$ $\quad$ $j \cdot k = i$ $\quad$ $k \cdot i = j$

Als je bovendien weet dat de vermenigvuldiging op Quaternion associatief maar niet commutatief is, wat is dan $k \cdot j \cdot i$?

A 1 $\quad$ **B** −1 $\quad$ **C** i $\quad$ **D** j $\quad$ **E** k

Antwoord A is juist.

$k \cdot j \cdot i = k \cdot k \cdot i \cdot i$ $\quad$ $j = k \cdot i$

$= -1 \cdot (-1)$ $\quad$ de vermenigvuldiging op Quaternion is associatief

$= 1$

(Bron: © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw, VWO tweede ronde, 2003, vraag xx) reeks 1

Oefening 51 p. 150

Wat hoort bij elkaar?
Er zijn drie trio's te vinden.

gelijk	$4 + 2i$	$\frac{20}{5} + \frac{6}{3}i$
tegengesteld	$3 + 4i$	$-3 - 4i$
toegevoegd	$2 + 4i$	$2 - 4i$

gelijk	$4 + 2i$	$3 + 4i$
$2 + 4i$	tegengesteld	$2 - 4i$
$\frac{20}{5} + \frac{6}{3}i$	$-3 - 4i$	toegevoegd

Oefening 52 p. 150

Vul de tabel in.

complex getal z	tegengesteld complex getal $-z$	toegevoegd complex getal $\bar{z}$
$3 + \sqrt{5}\,i$	$-3 - \sqrt{5}\,i$	$3 - \sqrt{5}\,i$
$6 - 9i$	$-6 + 9i$	$6 + 9i$
$\frac{5}{2} + \frac{1}{3}i$	$-\frac{5}{2} - \frac{1}{3}i$	$\frac{5}{2} - \frac{1}{3}i$
$8i - 3$	$-8i + 3$	$-8i - 3$

Oefening 53 p. 151

Met welk complex getal moet je de teller en de noemer van de breuk $\frac{3 + 5i}{2 - 3i}$ vermenigvuldigen om de noemer reëel te maken?

A $2 + 3i$ **B** $2 - 3i$ **C** $-2 + 3i$ **D** $-2 - 3i$

Antwoord A is juist.

Om de noemer van een breuk reëel te maken, vermenigvuldig je de teller en de noemer van de breuk met het complex toegevoegde van de noemer. Het complex toegevoegde van $2 - 3i$ is $2 + 3i$.

reeks 2

Oefening 54 p. 151

a Bereken $(7 + 5i) \cdot (7 + 5i)$.

$$\begin{aligned}(7 + 5i) \cdot (7 + 5i) &= 49 + 35i + 35i - 25\\ &= 24 + 70i\end{aligned}$$

b Bereken $(7 + 5i) \cdot (7 - 5i)$.

$$\begin{aligned}(7 + 5i) \cdot (7 - 5i) &= 49 - 35i + 35i + 25\\ &= 74\end{aligned}$$

c Bereken $(a + bi)^2$ en $(a + bi) \cdot (a - bi)$ met behulp van de rekenregels voor lettervormen.

$$\begin{aligned}(a+bi)^2 &= (a+bi)\cdot(a+bi)\\ &= a^2 + abi + bai - b^2\\ &= a^2 - b^2 + 2abi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+bi)\cdot(a-bi) &= a^2 - abi + bai + b^2\\ &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

Oefening 55 p. 151

Bereken.

a $(5 + 7i) + (6 - 3i)$

$= 5 + 7i + 6 - 3i$

$= 11 + 4i$

b $(4 + i) - (-3 + 2i)$

$= 4 + i + 3 - 2i$

$= 7 - i$

c $(2 + 5i) \cdot \left(\overline{2 - 6i}\right)$

$= (2 + 5i) \cdot (2 + 6i)$

$= 4 + 12i + 10i - 30$

$= -26 + 22i$

d $\dfrac{3}{2 - i}$

$= \dfrac{3}{2-i} \cdot \dfrac{2+i}{2+i}$

$= \dfrac{6+3i}{4+1}$

$= \dfrac{6}{5} + \dfrac{3}{5}i$

g $(1 + 2i)^{-1}$

$= \dfrac{1}{1+2i} \cdot \dfrac{1-2i}{1-2i}$

$= \dfrac{1-2i}{1+4}$

$= \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i$

h $\dfrac{6 + 2i}{1 + 2i}$

$= \dfrac{6+2i}{1+2i} \cdot \dfrac{1-2i}{1-2i}$

$= \dfrac{6 - 12i + 2i + 4}{1+4}$

$= \dfrac{10 - 10i}{5}$

$= 2 - 2i$

i $\dfrac{3 - i}{5i}$

$= \dfrac{3-i}{5i} \cdot \dfrac{i}{i}$

$= \dfrac{3i+1}{-5}$

$= -\dfrac{1}{5} - \dfrac{3}{5}i$

j $\left(3 + \dfrac{1}{2}i\right) - \left(5 - \dfrac{7}{2}i\right)$

$= 3 + \dfrac{1}{2}i - 5 + \dfrac{7}{2}i$

$= -2 + 4i$

e $\dfrac{1}{6+8i}$

$= \dfrac{1}{6+8i} \cdot \dfrac{6-8i}{6-8i}$

$= \dfrac{6-8i}{36+64}$

$= \dfrac{6}{100} - \dfrac{8}{100}i$

$= \dfrac{3}{50} - \dfrac{2}{25}i$

f $\dfrac{1-i}{1+i}$

$= \dfrac{1-i}{1+i} \cdot \dfrac{1-i}{1-i}$

$= \dfrac{\cancel{1} - 2i \cancel{+ i^2}}{1+1}$

$= \dfrac{-2i}{2}$

$= -i$

k $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$= \frac{1}{2} \cancel{+ \frac{1}{2}i} + \frac{1}{2} \cancel{- \frac{1}{2}i}$

$= 1$

l $(1+i)^2$

$= 1 + 2i + i^2$

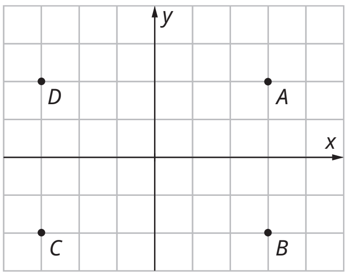
$= 1 - 1 + 2i$

$= 2i$

Oefening 56 p. 151

In de figuur zijn de beeldpunten getekend van een complex getal, zijn tegengestelde, zijn toegevoegde en nog een vierde complex getal.

A is het beeldpunt van z met $z = a + bi$.
Welk complex getal hoort bij de beeldpunten B, C en D?



B hoort bij $\bar{z}$, met $\bar{z} = a - bi$

C hoort bij $-z$ met $-z = -a - bi$

D hoort bij $-\bar{z}$ met $-\bar{z} = -a + bi$

Oefening 57 p. 151

Toon aan dat $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ en $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ niet alleen elkaars complexe toegevoegde maar ook elkaars omgekeerde zijn.

- De getallen zijn elkaars complex toegevoegde omdat de reële delen gelijk zijn en de imaginaire delen tegengesteld zijn.
- $\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right) \cdot \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right) = \frac{9}{25} - \cancel{\frac{12}{25}}i + \cancel{\frac{12}{25}}i + \frac{16}{25}$

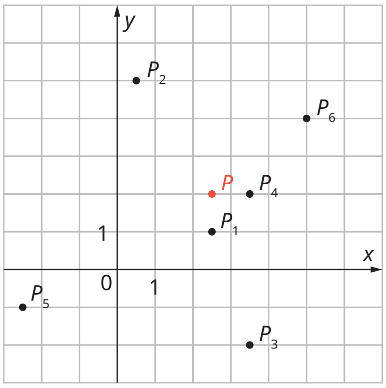
$= \dfrac{25}{25}$

$= 1$

De getallen zijn elkaars omgekeerde omdat hun product gelijk is aan 1.

Oefening 58 p. 151

Gegeven is een complex getal z met beeldpunt P.
Bepaal telkens welk beeldpunt P_1, P_2, ... of P_6 bij het gegeven complexe getal hoort.



a $1 + z$

P_4

b $z - i$

P_1

c $2z$

P_6

d $z - 2 + 3i$

P_2

e $-z + i$

P_5

f $\overline{z} + 1$

P_3

Oefening 59 p. 152

De beeldpunten van een aantal complexe getallen vormen in het complexe vlak een figuur.
Je telt bij elk van deze complexe getallen eenzelfde strikt positief reëel getal op en tekent de beeldpunten van de uitkomsten.
Waar bevindt de verkregen figuur zich ten opzichte van het origineel?

De figuur is horizontaal naar rechts verschoven.

Oefening 60 p. 152

Bereken

a $(1 + i)^3$

$= (1 + i)^2 \cdot (1 + i)$

$= (1 + 2i + i^2) \cdot (1 + i)$

$= 2i \cdot (1 + i)$

$= 2i - 2$

$= -2 + 2i$

b $\left(\sqrt{3} - 2i\right) + \left(\sqrt{3} - 2i\right)$

$= \sqrt{3} - 2i + \sqrt{3} - 2i$

$= 2\sqrt{3} - 4i$

e $\dfrac{-i^3}{i^5}$

$= \dfrac{-1}{i^2}$

$= \dfrac{-1}{-1}$

$= 1$

f i^{-1}

$= \dfrac{1}{i} \cdot \dfrac{i}{i}$

$= \dfrac{i}{-1}$

$= -i$

c $\left(4-\sqrt{3}\,i\right)-\left(2-2\sqrt{3}\,i\right)$

$= 4-\sqrt{3}i-2+2\sqrt{3}i$

$= 2+\sqrt{3}i$

d $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\cdot(3-5i)$

$= \frac{3}{2}-\frac{5}{2}i+\frac{3}{2}i+\frac{5}{2}$

$= 4-i$

g $\dfrac{3-5\sqrt{3}\,i}{9-\sqrt{3}\,i}$

$= \dfrac{3-5\sqrt{3}i}{9-\sqrt{3}i}\cdot\dfrac{9+\sqrt{3}i}{9+\sqrt{3}i}$

$= \dfrac{27+3\sqrt{3}i-45\sqrt{3}i+15}{81+3}$

$= \dfrac{42-42\sqrt{3}i}{84}$

$= \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

h $\dfrac{\left(\sqrt{2}-i\right)\left(\sqrt{2}+i\right)}{i}$

$= \dfrac{2+1}{i}$

$= \dfrac{3}{i}\cdot\dfrac{i}{i}$

$= \dfrac{3i}{-1}$

$= -3i$

Oefening 61 p. 152

De beeldpunten *A*, *B*, *C* en *D* van 0, 3 + 2*i*, 5 + 6*i* en nog een vierde complex getal vormen een parallellogram in het complexe vlak.
Bereken het vierde complexe getal.

Het gezochte complexe getal voldoet aan de vergelijking

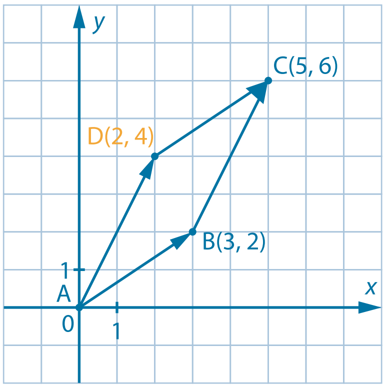
$3+2i+z = 5+6i$

$z = 5+6i-(3+2i)$

$= 5+6i-3-2i$

$= 5-3+6i-2i$

$= 2+4i$



Oefening 62 p. 152

Bereken.

a $\dfrac{1+18i}{3+4i}+\dfrac{7-26i}{3-4i}$

$= \dfrac{1+18i}{3+4i}\cdot\dfrac{3-4i}{3-4i}+\dfrac{7-26i}{3-4i}\cdot\dfrac{3+4i}{3+4i}$

$= \dfrac{3-4i+54i+72}{9+16}+\dfrac{21+28i-78i+104}{9+16}$

$= \dfrac{75+50i}{25}+\dfrac{125-50i}{25}$

$= 3\cancel{+2i}+5\cancel{-2i}$

$= 8$

b $\dfrac{1}{(1-i)^2} - \dfrac{1}{(1+i)^2}$

$= \dfrac{1}{1-2i+i^2} - \dfrac{1}{1+2i+i^2}$

$= \dfrac{1}{-2i} - \dfrac{1}{2i}$

$= -\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}i} \cdot \dfrac{i}{i}$

$= i$

c $\dfrac{(1-3i)(1+3i)}{1-i}$

$= \dfrac{1+9}{1-i}$

$= \dfrac{10}{1-i} \cdot \dfrac{1+i}{1+i}$

$= \dfrac{10+10i}{1+1}$

$= 5+5i$

d $\dfrac{(1-i\sqrt{3})^2}{1+i\sqrt{3}}$

$= \dfrac{1-2i\sqrt{3}-3}{1+i\sqrt{3}}$

$= \dfrac{-2-2i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$

$= \dfrac{-2\cdot\left(1+i\sqrt{3}\right)}{1+i\sqrt{3}}$

$= -2$

of

$= \dfrac{-2-2\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} \cdot \dfrac{1-\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}$

$= \dfrac{-2+\cancel{2\sqrt{3}i}-\cancel{2\sqrt{3}i}-2\sqrt{3}^2}{1+3}$

$= \dfrac{-2-6}{4}$

$= -2$

Oefening 63 p. 152

Los de vergelijkingen op in $\mathbb{C}$.

a $iz + 2 = 0$

$iz = -2$

$z = -\dfrac{2}{i}$

$z = -\dfrac{2}{i} \cdot \dfrac{i}{i}$

$z = -\dfrac{2i}{i^2}$

$z = 2i$

c $2(z-4) = i(z-5)$

$2z - 8 = iz - 5i$

$2z - iz = 8 - 5i$

$(2-i)z = 8-5i$

$z = \dfrac{8-5i}{2-i} \cdot \dfrac{2+i}{2+i}$

$z = \dfrac{16+8i-10i+5}{4+1}$

$z = \dfrac{21-2i}{5}$

$z = \dfrac{21}{5} - \dfrac{2}{5}i$

b $(2+i)z-3-2i=0$

$$(2+i)z=3+2i$$
$$z=\frac{3+2i}{2+i}$$
$$z=\frac{3+2i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}$$
$$z=\frac{6-3i+4i+2}{4+1}$$
$$z=\frac{8+i}{5}$$
$$z=\frac{8}{5}+\frac{1}{5}i$$

d $3-2i+2iz=3i(z-2)$

$$3-2i+2iz=3iz-6i$$
$$2iz-3iz=-6i-3+2i$$
$$-iz=-3-4i$$
$$z=\frac{-3-4i}{-i}\cdot\frac{i}{i}$$
$$z=\frac{-3i+4}{-i^2}$$
$$z=4-3i$$

Oefening 64 p. 152

Controleer dat het complexe getal een oplossing is van de vergelijking.

a $7+4i$ is oplossing van $(2-3i)z=13(2-i)$.

Vul de oplossing in en controleer de gelijkheid van beide leden.

linkerlid: $(2-3i)\cdot(7+4i)=14+8i-21i+12=26-13i$

rechterlid: $13(2-i)=26-13i$

b $-1-\frac{2}{5}i$ is oplossing van $(5+2i)z=(2-5i)+(5-3i)z$

Vul de oplossing in en controleer de gelijkheid van beide leden.

linkerlid: $(5+2i)\cdot\left(-1-\frac{2}{5}i\right)=-5-2i-2i+\frac{4}{5}=-\frac{25}{5}+\frac{4}{5}-4i=-\frac{21}{5}-4i$

rechterlid: $(2-5i)+(5-3i)\cdot\left(-1-\frac{2}{5}i\right)=2-5i-5-2i+3i-\frac{6}{5}=-3-\frac{6}{5}-4i=-\frac{21}{5}-4i$

Oefening 65 p. 152

Los de vergelijkingen op in $\mathbb{C}$.

a $-z^2 = 289$

$z^2 = -289$

$z = 17i$ of $z = -17i$

b $z^2 - 2z + 3 = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$= (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3$

$= -8$

De vierkantswortels uit -8 zijn $\sqrt{8}i$ en $-\sqrt{8}i$.

Kies $v = \sqrt{8}i$.

$z = \dfrac{-b+v}{2a}$ of $z = \dfrac{-b-v}{2a}$

$z = \dfrac{2+\sqrt{8}i}{2 \cdot 1}$ of $z = \dfrac{2-\sqrt{8}i}{2 \cdot 1}$

$z = \dfrac{2+2\sqrt{2}i}{2}$ of $z = \dfrac{2-2\sqrt{2}i}{2}$

$z = 1+\sqrt{2}i$ of $z = 1-\sqrt{2}i$

c $1 + 4z^2 = 0$

$4z^2 = -1$

$z^2 = -\dfrac{1}{4}$

$z = \dfrac{1}{2}i$ of $z = -\dfrac{1}{2}i$

d $2z^2 + 13z + 20 = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$= 13^2 - 4 \cdot 2 \cdot 20$

$= 9$

$z = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ of $z = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$

$z = \dfrac{-13+\sqrt{9}}{2 \cdot 2}$ of $z = \dfrac{-13-\sqrt{9}}{2 \cdot 2}$

$z = \dfrac{-13+3}{4}$ of $z = \dfrac{-13-3}{4}$

$z = -\dfrac{5}{2}$ of $z = -4$

f $z^2 + 10 = 1$

$z^2 = -9$

$z = 3i$ of $z = -3i$

g $4z^2 - 4z + 2 = 0$

$2z^2 - 2z + 1 = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$= (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1$

$= -4$

De vierkantswortels uit -4 zijn $2i$ en $-2i$.

Kies $v = 2i$.

$z = \dfrac{-b+v}{2a}$ of $z = \dfrac{-b-v}{2a}$

$z = \dfrac{2+2i}{2 \cdot 2}$ of $z = \dfrac{2-2i}{2 \cdot 2}$

$z = \dfrac{2+2i}{4}$ of $z = \dfrac{2-2i}{4}$

$z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$ of $z = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

h $-z^2 + 25 = 0$

$25 = z^2$

$5 = z$ of $-5 = z$

i $z^2 + 12z + 36 = 0$

methode 1:

$D = b^2 - 4ac$

$= 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36$

$= 0$

$z = \dfrac{-b}{2a}$

$z = \dfrac{-12}{2 \cdot 1}$

$z = -6$

methode 2:

$(z+6)^2 = 0$

$z + 6 = 0$

$z = -6$

e $z^2 - 4z + 13 = 0$

$$D = b^2 - 4ac$$
$$= (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13$$
$$= -36$$

De vierkantswortels uit -36 zijn $6i$ en $-6i$.

Kies $v = 6i$.

$z = \dfrac{-b+v}{2a}$ of $z = \dfrac{-b-v}{2a}$

$z = \dfrac{4+6i}{2 \cdot 1}$ of $z = \dfrac{4-6i}{2 \cdot 1}$

$z = \dfrac{4+6i}{2}$ of $z = \dfrac{4-6i}{2}$

$z = 2+3i$ of $z = 2-3i$

j $2z^2 - 8z + 11 = 0$

$$D = b^2 - 4ac$$
$$= (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 11$$
$$= -24$$

De vierkantswortels uit -24 zijn $\sqrt{24}i$ en $-\sqrt{24}i$.

Kies $v = \sqrt{24}i$.

$z = \dfrac{-b+v}{2a}$ of $z = \dfrac{-b-v}{2a}$

$z = \dfrac{8+\sqrt{24}i}{2 \cdot 2}$ of $z = \dfrac{8-\sqrt{24}i}{2 \cdot 2}$

$z = \dfrac{8+2\sqrt{6}i}{4}$ of $z = \dfrac{8-2\sqrt{6}i}{4}$

$z = 2+\dfrac{\sqrt{6}}{2}i$ of $z = 2-\dfrac{\sqrt{6}}{2}i$

Oefening 66 p. 152

a Los de vergelijkingen op in $\mathbb{C}$.

1 $z(z-1) = 0$

$z = 0$ of $z - 1 = 0$

$z = 1$

2 $3z^2 + 2z = 0$

$z(3z+2) = 0$

$z = 0$ of $3z + 2 = 0$

$3z = -2$

$z = -\dfrac{2}{3}$

3 $\sqrt{3}z^2 - 3z = 0$

$z\left(\sqrt{3}z - 3\right) = 0$

$z = 0$ of $\sqrt{3}z - 3 = 0$

$\sqrt{3}z = 3$

$z = \dfrac{3}{\sqrt{3}}$

$z = \sqrt{3}$

b Toon aan dat een tweedegraadsvergelijking van de vorm $az^2 + bz + c = 0$ met $a \in \mathbb{R}_0$, $b \in \mathbb{R}$ en $c = 0$ altijd reële oplossingen heeft.

De vergelijking herleidt zich tot $az^2 + bz = 0$.

Na toepassing van distributiviteit vind je $z(az + b) = 0$.

De oplossingen van de vergelijking zijn 0 en $-\frac{b}{a}$, beide reële getallen.

Oefening 67 p. 153

Voor welke waarde van het reële getal b is $\frac{2+i}{bi-1}$ een reëel getal?

(Bron: Alabama Statewide Mathematics Contest, 2010)

$$\begin{aligned}\frac{2+i}{bi-1} &= -\frac{2+i}{1-bi}\cdot\frac{1+bi}{1+bi}\\ &= -\frac{2+2bi+i-b}{1+b^2}\\ &= -\frac{2-b+(2b+1)i}{1+b^2}\end{aligned}$$

$\frac{2+i}{bi-1}$ is een reëel getal als $2b + 1 = 0$

$b = -\frac{1}{2}$

Oefening 68 p. 153

Voor welke waarde van het reële getal a is $\frac{5a+i}{1-2i}$ een zuiver imaginair getal?

$$\begin{aligned}\frac{5a+i}{1-2i} &= \frac{5a+i}{1-2i}\cdot\frac{1+2i}{1+2i}\\ &= \frac{5a+10ai+i-2}{1+4}\\ &= \frac{5a-2+(10a+1)i}{5}\\ &= \frac{5a-2}{5}+\frac{10a+1}{5}i\end{aligned}$$

$\frac{5a+i}{1-2i}$ is een zuiver imaginair getal als $5a - 2 = 0$ en $10a + 1 \neq 0$

$5a - 2 = 0$

$a = \frac{2}{5}$

Als $a = \frac{2}{5}$, dan is $10a + 1 = 10 \cdot \frac{2}{5} + 1 = \frac{20}{5} + 1 = 4 + 1 = 5 \neq 0$.

Oefening 69 p. 153

Bereken de reële getallen x en y als $(x + yi) + (1 + 5i) = (x + yi)(1 + 5i)$.

$x + yi + 1 + 5i = x + 5xi + yi - 5y$

$(x + 1) + (y + 5)\,i = (x - 5y) + (5x + y)\,i$

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = x - 5y \\ y + 5 = 5x + y \end{cases}$

$x + 1 = x - 5y$ $\qquad$ $y + 5 = 5x + y$

$1 = -5y$ $\qquad$ $5 = 5x$

$y = -\dfrac{1}{5}$ $\qquad$ $x = 1$

Oefening 70 p. 153

Bereken het complexe getal $x + yi$ zodat $(3 + 4i) \cdot (x + yi) = 7 + 26i$.

$(3 + 4i) \cdot (x + yi) = 7 + 26i$

$3x + 3yi + 4xi - 4y = 7 + 26i$

$(3x - 4y) + (3y + 4x)\,i = 7 + 26i$

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 3y + 4x = 26 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 4x + 3y = 26 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \cdot 4 \\ \cdot (-3) \end{array} \right.$

$\begin{cases} 12x - 16y = 28 \\ -12x - 9y = -78 \end{cases}$

$$\begin{array}{rl} & 12x - 16y = 28 \\ + & -12x - 9y = -78 \\ \hline & 0x - 25\,y = -50 \end{array}$$

$y = 2$ $\qquad$ $3x - 4 \cdot 2 = 7$

$3x = 15$

$x = 5$

Het complexe getal is $5 + 2i$.

Alternatief:

$(3 + 4i) \cdot z = 7 + 26i$

$z = \dfrac{7 + 26i}{3 + 4i}$

$z = \dfrac{7 + 26i}{3 + 4i} \cdot \dfrac{3 - 4i}{3 - 4i}$

$z = \dfrac{21 - 28i + 78i + 104}{9 + 16}$

$z = \dfrac{125 + 50i}{25}$

$z = 5 + 2i$

Oefening 71 p. 153

P is het beeldpunt van $6 + 5i$ en *S* is het beeldpunt van $4 + i$.

a • Bereken $2 \cdot (6 + 5i)$.

$2 \cdot (6 + 5i) = 12 + 10i$

• Teken *Q*, het beeldpunt van $2 \cdot (6 + 5i)$.
• Door welke transformatie wordt *P* afgebeeld op *Q*?

$Q = h_{(0,\,2)}(P)$ is het beeldpunt van P onder een homothetie met factor 2 en de oorsprong als centrum.

b • Bereken $i \cdot (6 + 5i)$.

$i \cdot (6 + 5i) = -5 + 6i$

• Teken *R*, het beeldpunt van $i\,(6 + 5i)$.
• Door welke transformatie wordt *P* afgebeeld op *R*?

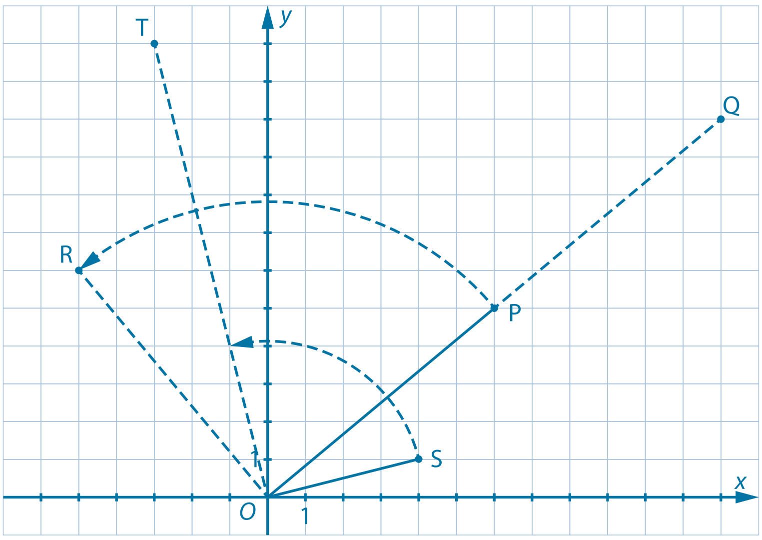
$R = r_{(0,\,90°)}(P)$ is het beeldpunt van P onder een draaiing over een hoek van 90° rond de oorsprong.

c • Bereken $3i \cdot (4 + i)$

$3i \cdot (4 + i) = -3 + 12i$

• Teken *T*, het beeldpunt van $3i \cdot (4 + i)$.
• Door welke transformaties wordt *S* afgebeeld op *T*?

T is het beeldpunt van S onder een homothetie met factor 3 en de oorsprong als centrum en een draaiing over een hoek van 90° rond de oorsprong.



Oefening 72 p. 154

Gegeven zijn drie complexe getallen waarvan de beeldpunten driehoek *ABC* vormen in het complexe vlak.

a Vermenigvuldig elk van deze complexe getallen met $3 + 2i$.

- $(2 + 3i)(3 + 2i)$

  $= 6 + 4i + 9i - 6$

  $= 13i$

- $(5 + 4i)(3 + 2i)$

  $= 15 + 10i + 12i - 8$

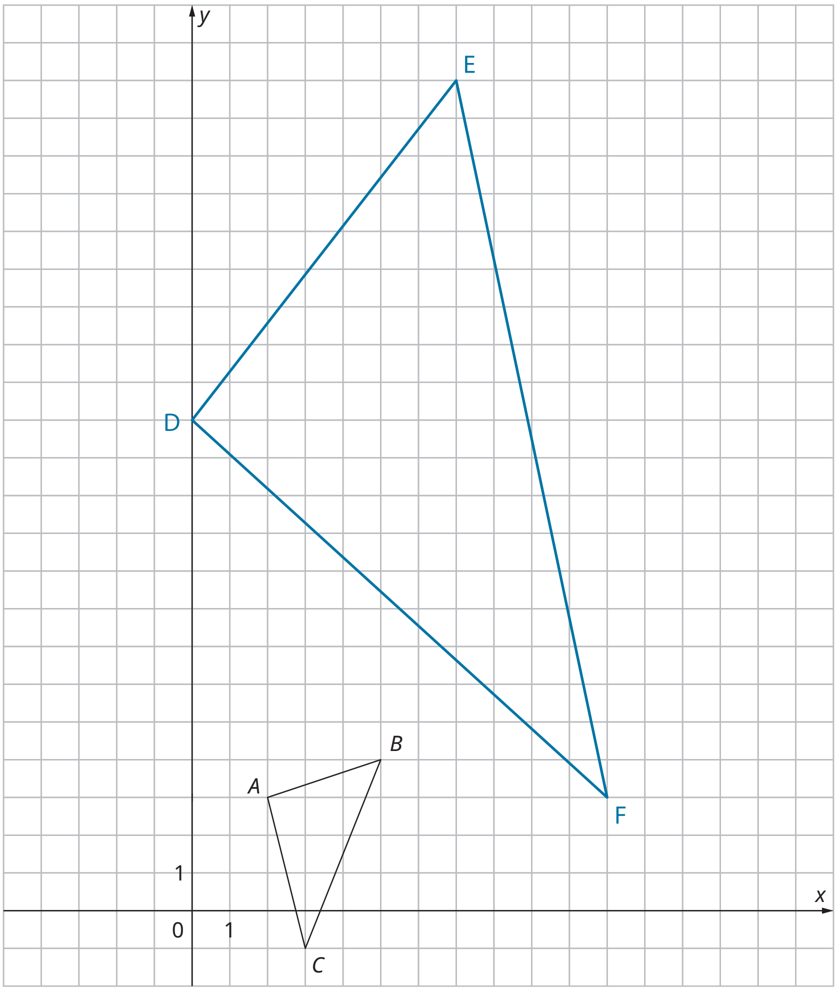
  $= 7 + 22i$

- $(3 - i)(3 + 2i)$

  $= 9 + 6i - 3i + 2$

  $= 11 + 3i$

b Teken de beeldpunten *D*, *E* en *F* van deze producten in het complexe vlak.



c Door welke transformaties wordt driehoek *ABC* op driehoek *DEF* afgebeeld?

De driehoek wordt gedraaid en vergroot. Driehoek DEF ontstaat uit driehoek ABC door een draaiing en een homothetie.

reeks 3

Oefening 73 p. 154

De derde macht van *z* is $-27i$ en *z* is een zuiver imaginair complex getal.
Bereken *z*.

Je zoekt de oplossing van $z^3 = -27i$.

Stel $z = bi$.

Dan is $(bi)^3 = -27i$.

$bi \cdot bi \cdot bi = -27i$

$b^3 \cdot i^3 = -27i$

$-b^3 i = -27i$

$b^3 = 27$

$b = 3$

Dus $z = 3i$.

Oefening 74 p. 154

Het complexe toegevoegde van het complexe toegevoegde van een complex getal is opnieuw het complexe getal.

a Noteer de eigenschap in symbolen.

$\forall z \in \mathbb{C} : \overline{(\overline{z})} = z$

b Toon de eigenschap aan.

Kies een willekeurig complex getal z.

Stel $z = a + bi$.

Dan is $\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$.

Daaruit volgt dat $\overline{(\overline{z})} = \overline{a - bi} = a + bi = z$.

Alternatieve verklaring:

Het complex toegevoegde kun je ook vinden door het beeldpunt van het complexe getal te spiegelen om de horizontale as.

Spiegel je dat punt opnieuw om de horizontale as, dan krijg je het oorspronkelijke punt.

Oefening 75 p. 154

Toon aan dat $\overline{z}^2 = -i$ als $z^2 = i$.

Kies een willekeurig complex getal z.

Stel $z = a + bi$.

- $z^2 = (a + bi)^2$

  $= a^2 - b^2 + 2abi$

  Omdat $z^2 = i$ volgt daaruit dat $a^2 - b^2 = 0$ en $2ab = 1$ (1)

- $\overline{z}^2 = (a - bi)^2$

  $= a^2 - b^2 - 2abi$

  $= -i$ (1)

Oefening 76 p. 154

Toon aan dat $\frac{a+bi}{c+di}$ en $\frac{a-bi}{c-di}$ toegevoegde complexe getallen zijn.

$$\begin{aligned}
&\frac{a+bi}{c+di}\\
&=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}\\
&=\frac{ac-adi+bci+bd}{c^2+d^2}\\
&=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{a-bi}{c-di}\\
&=\frac{a-bi}{c-di}\cdot\frac{c+di}{c+di}\\
&=\frac{ac+adi-bci+bd}{c^2+d^2}\\
&=\frac{ac+bd+(ad-bc)\,i}{c^2+d^2}\\
&=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{ad-bc}{c^2+d^2}i\\
&=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{-(bc-ad)}{c^2+d^2}i\\
&=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i \qquad (2)
\end{aligned}$$

Omdat de reële delen van (1) en (2) gelijk zijn en de imaginaire delen elkaars tegengestelde, zijn de twee getallen toegevoegde complexe getallen.

Oefening 77 p. 154

Alle beeldpunten van complexe getallen z waarvoor $(3 + 4i) \cdot z$ een reëel getal is, vormen in het vlak van Gauss

A een rechte
B een driehoek
C een cirkel
D een hyperbool
E een parabool

(Bron: University of South Carolina High School Math Contest, 1991)

Antwoord A is juist.

Stel $z = x + yi$.

Dan is

$(3 + 4i) \cdot z$

$= (3 + 4i) \cdot (x + yi)$

$= 3x + 3yi + 4xi - 4y$

$= 3x - 4y + (3y + 4x)\,i$

Als het getal reëel moet zijn, moet $3y + 4x = 0$, of $y = -\frac{4}{3}x$. Dat is de vergelijking van een rechte. De beeldpunten van de complexe getallen die aan deze vergelijking voldoen, liggen dus op een rechte in het vlak van Gauss.

Oefening 78 p. 155

a Werk uit tot $az^2 + bz + c = 0$ door gebruik te maken van merkwaardige producten.
$(z - (1 - 3i))(z - (1 + 3i)) = 0$

$((z - 1) + 3i)((z - 1) - 3i)) = 0$

$(z - 1)^2 - (3i)^2 = 0$ merkwaardig product $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

$z^2 - 2z + 1 - 9i^2 = 0$

$z^2 - 2z + 10 = 0$

b
- Controleer dat $1 + 3i$ en $1 - 3i$ oplossingen zijn van de gevonden vergelijking in **a**.

  $(1 + 3i)^2 - 2(1 + 3i) + 10 = 0$

  $(1 - 3i)^2 - 2(1 - 3i) + 10 = 0$

- Noteer de oplossingen van de tweedegraadsvergelijking $az^2 + bz + c = 0$ met reële coëfficiënten verschillend van 0.

  $\dfrac{-b + v}{2a}$ en $\dfrac{-b - v}{2a}$ met $v^2 = D$

- Welk verband stel je vast tussen de twee oplossingen?

  De oplossingen zijn elkaars complex toegevoegde.

c
- Noteer een tweedegraadsvergelijking met reële coëfficiënten waarvan $3 + 2i$ een van beide wortels is.
- Noteer de vergelijking in de vorm $az^2 + bz + c = 0$.

  $(z - (3 + 2i))(z - (3 - 2i)) = 0$

  $((z - 3) - 2i)((z - 3) + 2i) = 0$

  $(z - 3)^2 - (2i)^2 = 0$

  $z^2 - 6z + 9 - 4i^2 = 0$

  $z^2 - 6z + 13 = 0$

reeks 1

Oefening 79 p. 155

Welke complexe getallen zijn ongeveer gelijk aan elkaar? Noteer de overeenkomstige letters.

a $3(\cos 95° + i \sin 95°)$

b $-4{,}47 - 0{,}55i$

c $-6{,}34 + 2{,}96i$

d $7(\cos 155° + i \sin 155°)$

e $13(\cos(-63°) + i \sin(-63°))$

f $-0{,}26 + 2{,}99i$

g $5{,}90 - 11{,}58i$

h $4{,}5(\cos(-173°) + i \sin(-173°))$

a en f, d en c, e en g, h en b

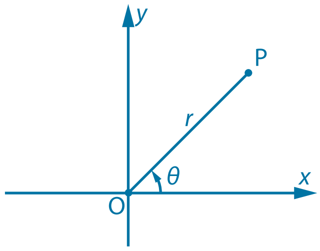
Oefening 80 p. 155

Noteer de complexe getallen in de goniometrische vorm met behulp van het stappenplan.

1. Noteer de waarde voor *a* en *b*.
2. Bereken de modulus.
3. Bereken een argument. Hou rekening met het kwadrant waarin het beeldpunt van het complexe getal ligt.
4. Noteer de goniometrische vorm.

a $8 + 3i$

$a = 8$ en $b = 3$



$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}$

$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{3}{8}$

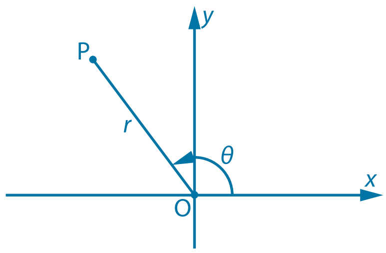
$\theta = 20{,}556\ldots° \approx 20°33'22''$ of $\theta = 20{,}556\ldots° + 180° = 200{,}556\ldots° \approx 200°33'22''$

Het beeldpunt van z ligt in het eerste kwadrant, dus $\theta \approx 20°33'22''$.

$8 + 3i \approx \sqrt{73}(\cos 20°33'22'' + i \sin 20°33'22'')$

b $-5 + 2i$

$a = -5$ en $b = 2$



$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$

$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{2}{-5} = -\frac{2}{5}$

$\theta = -21{,}801\ldots° \approx -21°48'5''$ of

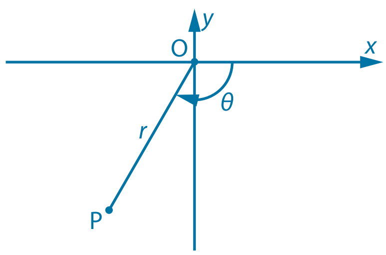
$\theta = -21{,}801\ldots° + 180° = 158{,}198\ldots° \approx 158°11'55''$

Het beeldpunt van z ligt in het tweede kwadrant, dus $\theta \approx 158°11'55''$.

$-5 + 2i \approx \sqrt{29}(\cos 158°11'55'' + i \sin 158°11'55'')$

c $-2 - 7i$

$a = -2$ en $b = -7$



$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-7)^2} = \sqrt{53}$

$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}$

$\theta = 74{,}054\ldots° \approx 74°3'17''$ of

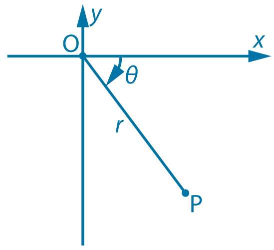
$\theta = 74{,}054\ldots° + 180° = 254{,}055\ldots° \approx 254°3'17''$

Het beeldpunt van z ligt in het derde kwadrant, dus: $\theta \approx 254°3'17''$.

$-2 - 7i \approx \sqrt{53}(\cos 254°3'17'' + i \sin 254°3'17'')$

d $6 - 10i$

$a = 6$ en $b = -10$



$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + (-10)^2} = \sqrt{136}$

$\tan \theta = \dfrac{b}{a} = \dfrac{-10}{6} = -\dfrac{5}{3}$

$\theta = -59{,}036\ldots° \approx -59°\,2'\,10''$ of $\theta = -59{,}036\ldots° + 180° = 120{,}963\ldots° \approx 120°\,57'\,50''$

Het beeldpunt van z ligt in het vierde kwadrant, dus: $\theta \approx -59°\,2'\,10''$.

$6 - 10i = \sqrt{136}(\cos(-59°2'10'') + i\sin(-59°\,2'\,10''))$

Oefening 81 p. 155

Koppel de bewerkingen aan de correcte uitkomst.

a $(5\,(\cos 23° + i\sin 23°)) \cdot (12\,(\cos 85° + i\sin 85°))$

b $(16\,(\cos 42° + i\sin 42°)) : (4\,(\cos 152° + i\sin 152°))$

c $(2\,(\cos(-28°) + i\sin(-28°))) \cdot (3\,(\cos 98° + i\sin 98°))$

d $(10\,(\cos 64° + i\sin 64°)) : (4\,(\cos(-12°) + i\sin(-12°)))$

1 $\frac{5}{2}(\cos 76° + i\sin 76°)$

2 $4\,(\cos(-110°) + i\sin(-110°))$

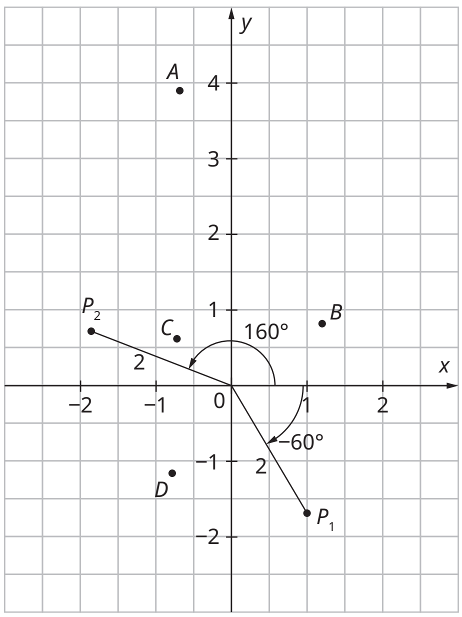
3 $60\,(\cos 108° + i\sin 108°)$

4 $6\,(\cos 70° + i\sin 70°)$

a	b	c	d
3	2	4	1

Oefening 82 p. 156

P_1 en P_2 zijn de beeldpunten van de complexe getallen z_1 en z_2.



a **1** Over welke hoek wordt gedraaid bij de bewerking $z_1 \cdot z_2$?

160°

2 Wat is de factor van de homothetie bij de bewerking $z_1 \cdot z_2$?

2

3 Noteer het beeldpunt van het product $z_1 \cdot z_2$ van deze complexe getallen.

A

b **1** Over welke hoek wordt gedraaid bij de bewerking $\frac{z_1}{z_2}$?

–160°

2 Wat is de factor van de homothetie bij de bewerking $\frac{z_1}{z_2}$?

$\frac{1}{2}$

3 Noteer het beeldpunt van het product $\frac{z_1}{z_2}$ van deze complexe getallen.

C

Oefening 83 p. 156

- Noteer de complexe getallen in de cartesische vorm.
- Rond indien nodig af op 2 decimalen.

a $2(\cos 35° + i\sin 35°)$

$\approx 1{,}64 + 1{,}15i$

b $\sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$= 1 + i$

c $7(\cos 128° + i\sin 128°)$

$\approx -4{,}31 + 5{,}52i$

d $6(\cos 90° + i\sin 90°)$

$= 6i$

Oefening 84 p. 156

Bereken de modulus en het argument van het complexe getal.

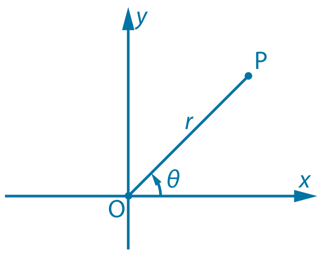
a $1 + i$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{1} = 1$

$\theta = 45°$ of $\theta = 45° + 180° = 225°$

Het beeldpunt van z ligt in het eerste kwadrant, dus: $\arg(z) = 45°$.



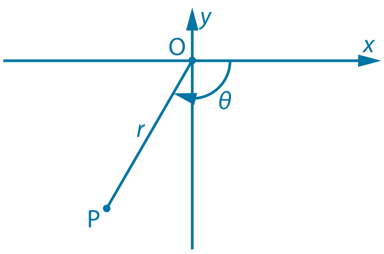
b $-1 - i$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{-1}{-1} = 1$

$\theta = 45°$ of $\theta = 45° + 180° = 225°$

Het beeldpunt van z ligt in het tweede kwadrant, dus: $\arg(z) = 225°$.



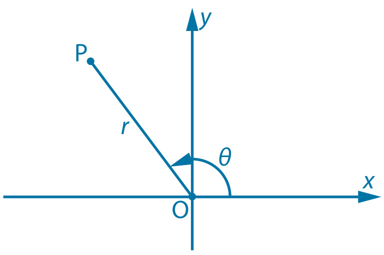
c $-1 + i\sqrt{3}$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$

$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$

$\theta = -60°$ of $\theta = 120°$

Het beeldpunt van z ligt in het tweede kwadrant, dus: $\arg(z) = 120°$.



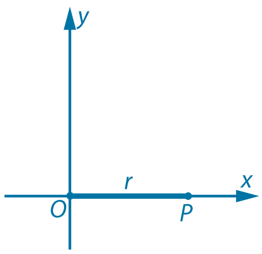
d 4

$|z| = |a| = |4| = 4$

of

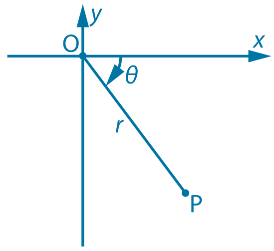
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4$

$\arg(z) = 0°$



e $2 - 5i$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$



$\tan\theta = \dfrac{b}{a} = \dfrac{-5}{2} = -\dfrac{5}{2}$

$\theta = -68{,}198\ldots° \approx -68°\,11'55''$ of $\theta = -68{,}198\ldots° + 180° = 111{,}801\ldots°$

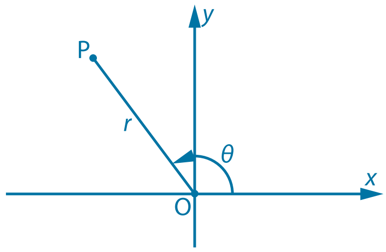
$\approx 111°\,48'5''$

Het beeldpunt van z ligt in het vierde kwadrant, dus $\arg(z)$

$\approx -68°\,11'55''$

f $-1 + 4i$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{17}$



$\tan\theta = \dfrac{b}{a} = \dfrac{4}{-1} = -4$

$\theta = -75{,}963\ldots° \approx -75°\,57'50''$ of $\theta = -75{,}963\ldots° + 180° = 104{,}036\ldots°$

$\approx 104°\,2'10''$

Het beeldpunt van z ligt in het tweede kwadrant, dus $\arg(z)$

$\approx 104°\,2'10''$

Oefening 85 p. 156

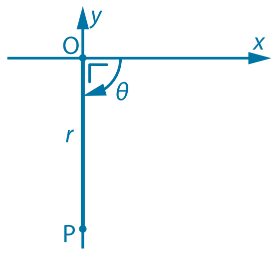
Noteer de complexe getallen in de goniometrische vorm.

a $-\sqrt{7}\,i$

$r = |b| = |-\sqrt{7}| = \sqrt{7}$

of

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + \left(-\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{7}$



$\theta = -90°$

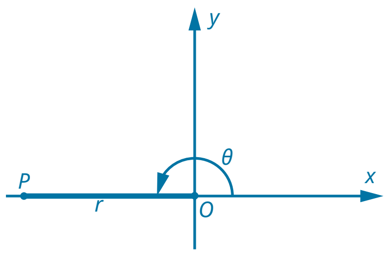
$-\sqrt{7}\,i = \sqrt{7}(\cos(-90°) + i\sin(-90°))$

b -3

$r = |a| = |-3| = 3$

of

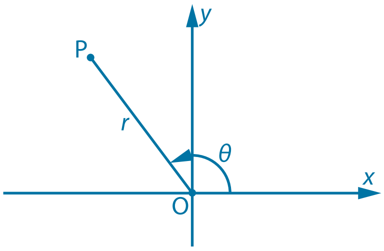
$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$



$\theta = 180°$

$-3 = 3(\cos 180° + i\sin 180°)$

c $-7 + 2i$



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-7)^2 + 2^2} = \sqrt{53}$

$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{2}{-7} = -\frac{2}{7}$

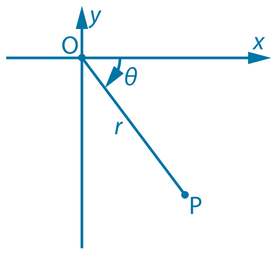
$\theta = -15{,}945\ldots° \approx -15°56'43''$ of $\theta = -15{,}945\ldots° + 180° = 164{,}054\ldots°$

$\approx 164°3'17''$

Het beeldpunt van z ligt in het tweede kwadrant, dus $\theta \approx 164°3'17''$.

$-7 + 2i = \sqrt{53}(\cos 164°3'17'' + i \sin 164°3'17'')$

d $5 - 8i$



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5^2 + (-8)^2} = \sqrt{89}$

$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{-8}{5} = -\frac{8}{5}$

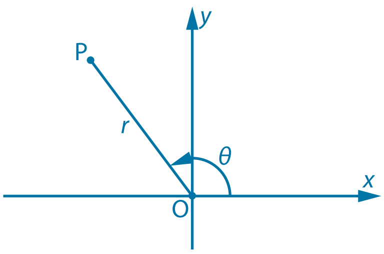
$\theta = -57{,}994\ldots° \approx -57°59'41''$ of $\theta = -57{,}994\ldots° + 180° = 122{,}005\ldots°$

$\approx 122°0'19''$

Het beeldpunt van z ligt in het vierde kwadrant, dus $\theta \approx -57°59'41''$.

$5 - 8i = \sqrt{89}(\cos -57°59'41'' + i \sin -57°59'41'')$

e $-2 + i$



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$

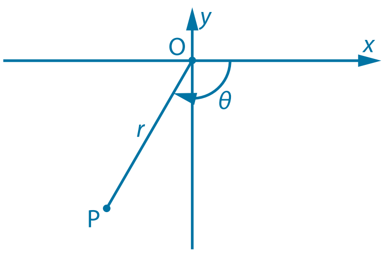
$\theta = -26{,}565\ldots° \approx -26°33'54''$ of $\theta = -26{,}565\ldots° + 180° = 153{,}434\ldots°$

$\approx 153°26'6''$

Het beeldpunt van z ligt in het tweede kwadrant, dus $\theta \approx 153°26'6''$.

$-2 + i = \sqrt{5}(\cos 153°26'6'' + i \sin 153°26'6'')$

f $-6 - \sqrt{3}\,i$



$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-6)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{39}$

$\tan\theta = \frac{b}{a} = \frac{-\sqrt{3}}{-6} = \frac{\sqrt{3}}{6}$

$\theta = 16{,}102\ldots° \approx 16°6'8''$ of $\theta = 16{,}102\ldots° + 180° = 196{,}102\ldots° \approx$

$196°6'8''$

Het beeldpunt van z ligt in het derde kwadrant, dus $\theta \approx 196°6'8''$.

$-6 - \sqrt{3}i = \sqrt{39}(\cos 196°6'8'' + i \sin 196°6'8'')$

Oefening 86 p. 156

Bereken.

a $z_1 \cdot z_2$ met $z_1 = 6\,(\cos(-123°) + i\sin(-123°))$ en $z_2 = \frac{2}{3}\,(\cos 23° + i\sin 23°)$

$z_1 \cdot z_2 = 6 \cdot \frac{2}{3}(\cos(-123° + 23°) + i\sin(-123° + 23°))$

$= 4(\cos(-100°) + i\sin(-100°))$

b $\frac{z_1}{z_2}$ met $z_1 = 27\,(\cos 157° + i\sin 157°)$ en $z_2 = 3\,(\cos 53° + i\sin 53°)$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{27}{3}(\cos(157° - 53°) + i\sin(157° - 53°))$

$= 9(\cos 104° + i\sin 104°)$

c $z_1 \cdot z_2$ met $z_1 = \frac{2}{5}(\cos 38° + i\sin 38°)$ en $z_2 = \frac{15}{4}\,(\cos(-167°) + i\sin(-167°))$

$z_1 \cdot z_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{15}{4}(\cos(38° - 167°) + i\sin(38° - 167°))$

$= \frac{3}{2}(\cos(-129°) + i\sin(-129°))$

d $\frac{z_1}{z_2}$ met $z_1 = \sqrt{8}(\cos 159° + i\sin 159°)$ en $z_2 = \sqrt{2}(\cos(-29°) + i\sin(-29°))$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}(\cos(159° + 29°) + i\sin(159° + 29°))$

$= 2(\cos 188° + i\sin 188°)$

Oefening 87 p. 157

Bereken. Noteer het antwoord in de cartesische vorm.

a $z_1 \cdot z_2$ met $z_1 = 3\,(\cos 45° + i\sin 45°)$ en $z_2 = 6\,(\cos 15° + i\sin 15°)$

$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 6(\cos(45° + 15°) + i\sin(45° + 15°))$

$= 18(\cos 60° + i\sin 60°)$

$= 18\left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 9 + 9\sqrt{3}i$

b $\frac{z_1}{z_2}$ met $z_1 = 4(\cos(-45°) + i\sin(-45°))$ en $z_2 = 2(\cos(-75°) + i\sin(-75°))$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4}{2}(\cos(-45° + 75°) + i\sin(-45° + 75°))$

$= 2(\cos 30° + i\sin 30°)$

$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right)$

$= \sqrt{3} + i$

c $z_1 \cdot z_2$ met $z_1 = 3\,(\cos 160° + i \sin 160°)$ en $z_2 = 4\,(\cos 170° + i \sin 170°)$

$z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 4(\cos(160° + 170°) + i\sin(160° + 170°))$

$= 12(\cos 330° + i \sin 330°)$

$= 12(\cos(-30°) + i \sin(-30°))$

$= 12(\cos 30° - i \sin 30°)$ tegengestelde hoeken: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ en $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$= 12\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2}\right)$

$= 6\sqrt{3} - 6i$

d $\frac{z_1}{z_2}$ met $z_1 = 5\,(\cos 85° + i \sin 85°)$ en $z_2 = 7\,(\cos 130° + i \sin 130°)$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{7}(\cos(85° - 130°) + i \sin(85° - 130°))$

$= \frac{5}{7}(\cos(-45°) + i \sin(-45°))$

$= \frac{5}{7}(\cos 45° - i \sin 45°)$ tegengestelde hoeken: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ en $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\frac{5}{7}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\frac{5\sqrt{2}}{14} - \frac{5\sqrt{2}}{14}i$

Oefening 88 p. 157

Bereken. Noteer het antwoord in de cartesische vorm.

a $\sqrt{2}(\cos 125° + i \sin 125°) \cdot \sqrt{18}(\cos(-125°) + i \sin(-125°))$

$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{18}(\cos(125° - 125°) + i \sin(125° - 125°))$

$= \sqrt{36}(\cos 0° + i \sin 0°)$

$= 6(1 + i \cdot 0)$

$= 6$

b $\frac{6(\cos 50° + i \sin 50°)}{3(\cos 20° + i \sin 20°)}$

$= \frac{6}{3}(\cos(50° - 20°) + i \sin(50° - 20°))$

$= 2(\cos 30° + i \sin 30°)$

$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right)$

$= \sqrt{3} + i$

c $\sqrt{2}(\cos 132° + i \sin 132°) \cdot \sqrt{8}(\cos(-42°) + i \sin(-42°))$

$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{8}(\cos(132° - 42°) + i \sin(132° - 42°))$

$= \sqrt{16}(\cos 90° + i \sin 90°)$

$= 4(0 + i \cdot 1)$

$= 4i$

d $\dfrac{1}{5(\cos 300° + i\sin 300°)}$

$= \dfrac{\cos 0° + i\sin 0°}{5(\cos 300° + i\sin 300°)}$

$= \dfrac{1}{5}(\cos(0° - 300°) + i\sin(0° - 300°))$

$= \dfrac{1}{5}(\cos(-300°) + i\sin(-300°))$

$= \dfrac{1}{5}(\cos 60° + i\sin 60°)$ gelijke hoeken: $\sin(\alpha + 360°) = \sin\alpha$ en $\cos(\alpha + 360°) = \cos\alpha$

$= \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{2} + i \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

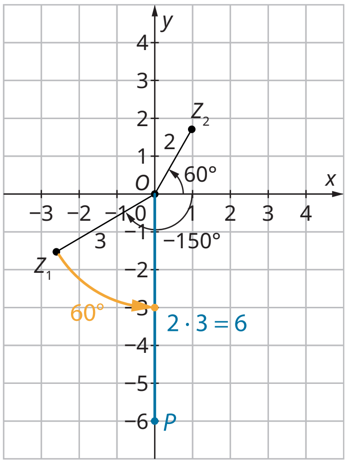
$= \dfrac{1}{10} + \dfrac{\sqrt{3}}{10}i$

Oefening 89 p. 157

Z_1 en Z_2 zijn de beeldpunten van de complexe getallen z_1 en z_2.

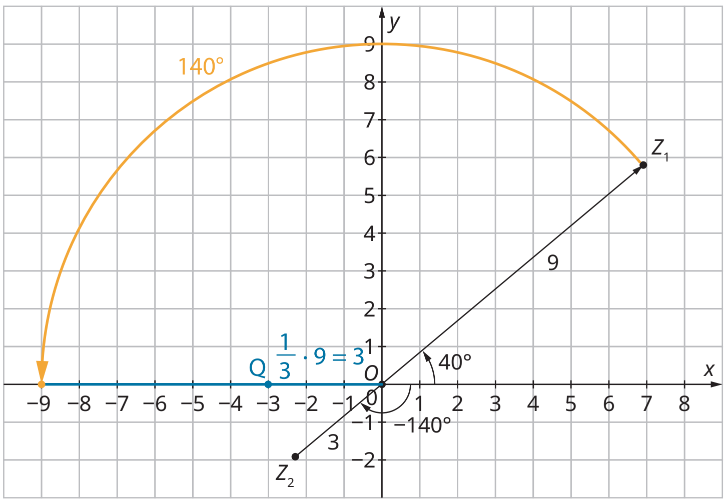
a Teken het beeldpunt P van het product van deze complexe getallen.

Je draait het beeldpunt over een hoek van 60° en voert een homothetie uit met factor 2.



b Teken het beeldpunt Q van het quotiënt van deze complexe getallen.

Je draait het beeldpunt over een hoek van 140° en voert een homothetie uit met factor $\dfrac{1}{3}$.



Oefening 90 p. 157

Gegeven is het complexe getal $z = \frac{16 - 48i}{8 + 4i}$. Bereken de modulus van z.

A $|z| = \frac{16}{3}$ **B** $|z| = 4\sqrt{2}$ **C** $|z| = 2\sqrt{65}$ **D** $|z| = 18$

(Bron: IJkingstoets BIR september 2020)

Antwoord B is juist.

$16 - 48i \qquad |z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16^2 + (-48)^2} = \sqrt{2\,560}$

$8 + 4i \qquad |z_2| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80}$

$$|z| = \frac{\sqrt{2\,560}}{\sqrt{80}} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Oefening 91 p. 158

Het complexe getal z voldoet aan $2z + \bar{z} = \frac{-7 + 11i}{1 - i}$. Bereken de modulus van z.

A $|z| = \sqrt{5}$ **B** $|z| = 3$ **C** $|z| = \sqrt{13}$ **D** $|z| = \sqrt{17}$

(Bron: IJkingstoets BIR augustus 2020)

Antwoord C is juist.

- $2z + \bar{z} = 2(a + bi) + (a - bi) = 2a + 2bi + a - bi = 3a + bi$
- $$\begin{aligned}\frac{-7 + 11i}{1 - i} &= \frac{-7 + 11i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i}\\ &= \frac{-7 - 7i + 11i + 11i^2}{1 - i^2}\\ &= \frac{-7 - 7i + 11i - 11}{1 + 1}\\ &= \frac{-18 + 4i}{2}\\ &= -9 + 2i\end{aligned}$$
- Er moet dus gelden dat $3a = -9$ en $b = 2$.

  $3a = -9$

  $a = -3$

  Dus: $z = -3 + 2i$
- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

Oefening 92 p. 158

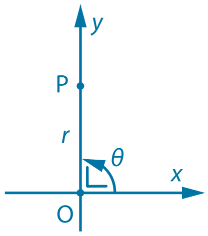
1 Noteer de complexe getallen in de goniometrische vorm.
2 Stel de beeldpunten van de complexe getallen voor in het complexe vlak door gebruik te maken van hun goniometrische vorm.

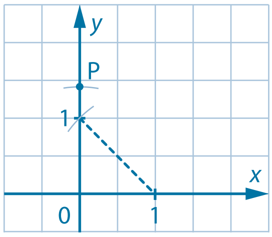
a $\sqrt{2}\,i$

$r = |b| = |\sqrt{2}| = \sqrt{2}$

of

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$





$\theta = 90°$

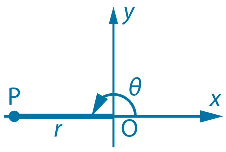
$\sqrt{2}\,i = \sqrt{2}(\cos 90° + i \sin 90°)$

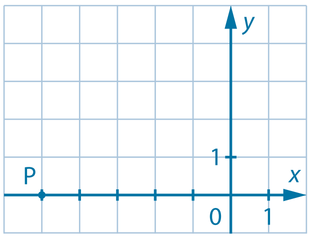
b -5

$r = |a| = |-5| = 5$

of

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$



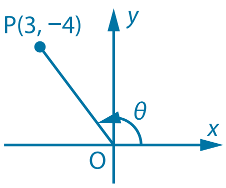


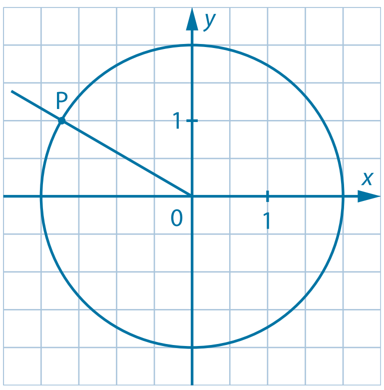
$\theta = 180°$

$-5 = 5(\cos 180° + i \sin 180°)$

c $-\sqrt{3} + i$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$





$\tan\theta = \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{-\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\theta = -30°$ of $\theta = -30° + 180° = 150°$

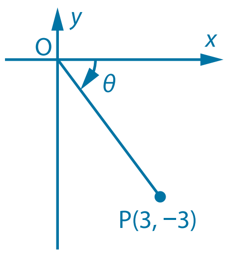
Het beeldpunt van z ligt in het

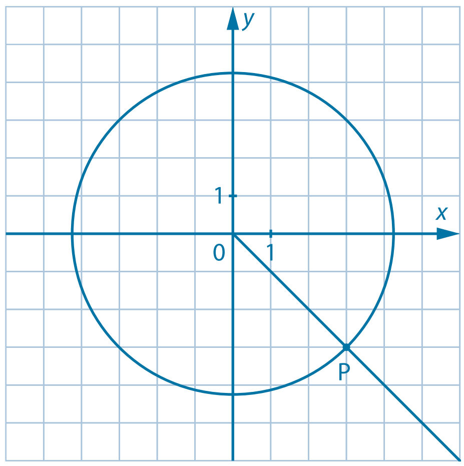
tweede kwadrant, dus $\theta = 150°$.

$-\sqrt{3} + i = 2(\cos 150° + i \sin 150°)$

d $3 - 3i$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18}$





$\tan\theta = \dfrac{b}{a} = \dfrac{-3}{3} = -1$

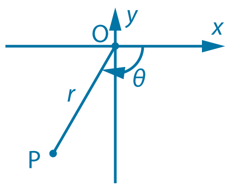
$\theta = -45°$ of $\theta = -45° + 180° = 135°$

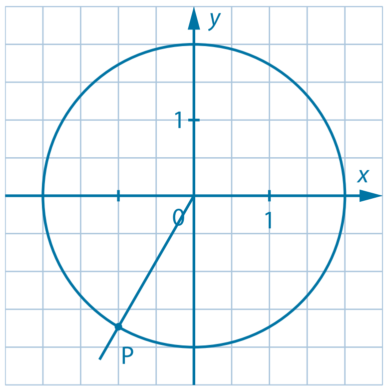
Het beeldpunt van z ligt in het vierde kwadrant, dus $\theta = -45°$.

$3 - 3i = \sqrt{18}(\cos(-45°) + i\sin(-45°))$

e $-1 - \sqrt{3}\,i$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$





$\tan\theta = \dfrac{b}{a} = \dfrac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$

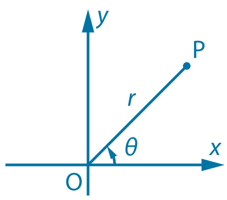
$\theta = 60°$ of $\theta = 60° + 180° = 240°$

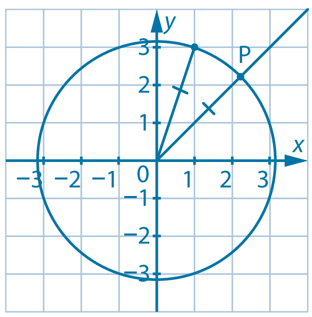
Het beeldpunt van z ligt in het derde kwadrant, dus $\theta = 240°$.

$-1 - \sqrt{3}i = 2(\cos 240° + i\sin 240°)$

f $\sqrt{5} + \sqrt{5}\,i$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{10}$





$\tan\theta = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1$

$\theta = 45°$ of $\theta = 45° + 180° = 225°$

Het beeldpunt van z ligt in het eerste kwadrant, dus $\theta = 45°$.

$\sqrt{5} + \sqrt{5}i = \sqrt{10}(\cos 45° + i\sin 45°)$

Oefening 93 p. 158

Gegeven zijn de complexe getallen z_1 en z_2.

$z_1 = r_1\,(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$
$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$
Bewijs dat $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot \left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right)$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - i \cdot \cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2 + i\sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2}{\cos^2\theta_2 - i^2 \cdot \sin^2\theta_2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - i \cdot \cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2 + i\sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - i \cdot \cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2 + i\sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2}{1}$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \left(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - i \cdot \cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2 + i\sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2\right)$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \left(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2 + i(\sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2)\right)$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \cdot \left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right)$$

verschilformules

Oefening 94 p. 158

Bereken de reële getallen a en b als $z = a + bi$ en $z + |z| = 2 + 8i$.

$z + |z| = 2 + 8i$

$a + bi + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 + 8i$

$(a + \sqrt{a^2 + b^2}) + bi = 2 + 8i$

Er moet dus gelden dat $a + \sqrt{a^2 + b^2} = 2$ en $b = 8$.

$a + \sqrt{a^2 + 8^2} = 2$

$a + \sqrt{a^2 + 64} = 2$

$\sqrt{a^2 + 64} = 2 - a$

$a^2 + 64 = 4 - 4a + a^2$

$a^2 + 64 \geqslant 0$ en $2 - a \geqslant 0$ dus $2 \geqslant a$

$4a = -60$

$a = -15$

Besluit: $a = -15$ en $b = 8$

Oefening 95 p. 158

Als het complexe getal z voldoet aan $z^2 = \frac{(2+i)(-1+2i)}{2(3+4i)}$, dan is de modulus van z gelijk aan

A $\frac{1}{2}$ **B** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C** $\sqrt{2}$ **D** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **E** $\frac{1}{4}$

(Bron: IJkingstoets BIR 2013)

Antwoord B is juist.

$$
\begin{aligned}
z^2 &= \frac{(2+i)\cdot(-1+2i)}{2\cdot(3+4i)}\\
&= \frac{-2-i+4i-2}{2\cdot(3+4i)}\\
&= \frac{-4+3i}{2\cdot(3+4i)}\cdot\frac{3-4i}{3-4i}\\
&= \frac{-12+9i+16i+12}{2\cdot(9+16)}\\
&= \frac{25i}{2\cdot 25}\\
&= \frac{1}{2}i\\
&= \frac{1}{2}(\cos 90° + i\sin 90°)
\end{aligned}
$$

$r^2 = \frac{1}{2}$ dus $r = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Oefening 96 p. 158

Vul aan.

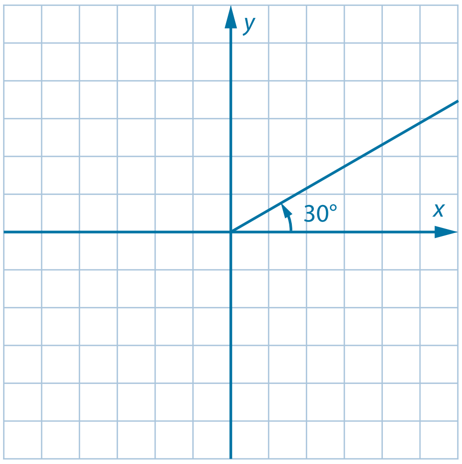
a De beeldpunten van alle complexe getallen met dezelfde modulus vormen in het complexe vlak een cirkel.

b De beeldpunten van alle complexe getallen met hetzelfde argument vormen in het complexe vlak een halfrechte die begint in de oorsprong.

Oefening 97 p. 158

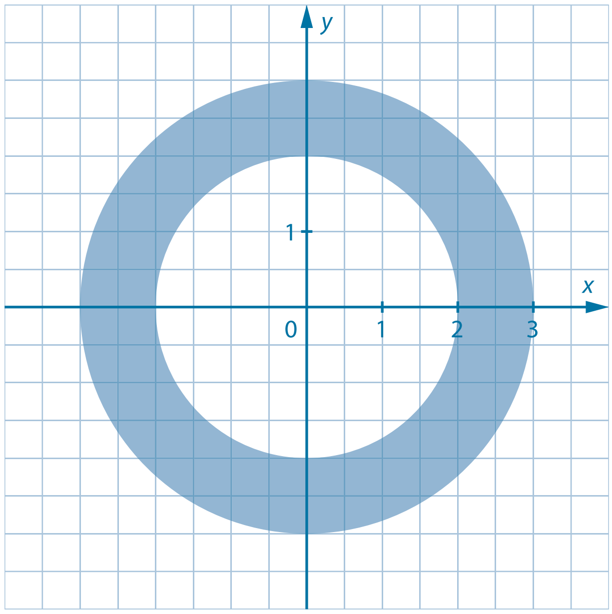
Teken in het complexe vlak de beeldpunten van alle complexe getallen z die voldoen aan de voorwaarde.

a $\arg(z) = 30°$



Alle punten op de halfrechte voldoen aan de voorwaarde.

b $2 \leqslant |z| \leqslant 3$



Alle punten op en tussen de cirkels voldoen aan de voorwaarde.

Oefening 98 p. 158

Gegeven zijn twee complexe getallen z_1 en z_2 waarvan de beeldpunten Z_1 en Z_2 de snijpunten zijn van de goniometrische cirkel met de bissectrice van het eerste en derde kwadrant.
Bereken de coördinaat van het beeldpunt van $z_1 \cdot z_2$.

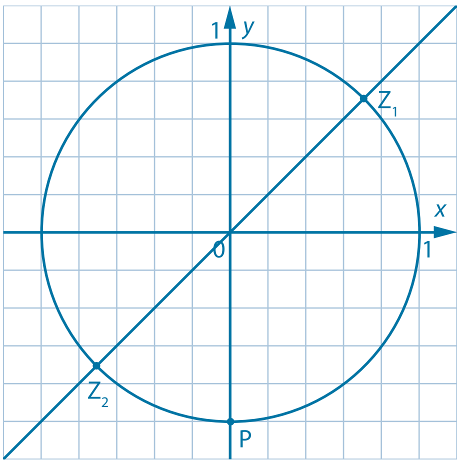
$z_1 = \cos 45° + i \sin 45°$ en $z_2 = \cos(-135°) + i \sin(-135°)$

$z_1 \cdot z_2 = \cos(45° + (-135°)) + i \sin(30° + (-135°))$

$= \cos(-90°) + i \sin(-90°)$

$= 0 + i \cdot (-1)$

$= -i$



De coördinaat van het beeldpunt P van $z_1 \cdot z_2$ is $(0, -1)$.

Oefening 99 p. 158

1 Leg uit waarom de complexe getallen niet in de goniometrische vorm genoteerd zijn.

2 Noteer de getallen in de goniometrische vorm.
Verklaar.

a $5\,(\cos 30° - i \sin 30°)$

a Er staat een minteken voor de i i.p.v. een plusteken.

b $5(\cos 30° - i \sin 30°)$

$= 5(\cos(-30°) + i \sin(-30°))$ tegengestelde hoeken: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ en $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

b $7\,(-\cos 80° + i \sin 80°)$

a Er staat een minteken voor de cosinus.

b $7(-\cos 80° + i \sin 80°)$

$= 7(\cos 100° + i \sin 100°)$ supplementaire hoeken: $\sin(180°-\alpha) = \sin\alpha$ en $\cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha$

c $-3\,(\cos 20° + i \sin 20°)$

a De modulus kan niet negatief zijn.

b $-3(\sin 20° + i \cos 20°)$

$= 3(-\sin 20° - i \cos 20°)$

$= 3(\sin 200° + i \cos 200°)$ antisupplementaire hoeken: $\sin(180°+\alpha) = \sin\alpha$ en $\cos(180°+\alpha) = -\cos\alpha$

d $-2\,(\sin 10° + i \cos 10°)$

a De modulus kan niet negatief zijn en cosinus hoort bij het reële deel en sinus bij het imaginaire deel.

b $-2(\sin 10° + i \cos 10°)$

$= 2(-\sin 10° - i \cos 10°)$

$= 2(\sin 190° + i \cos 190°)$ antisupplementaire hoeken: $\sin\alpha = \sin(180° + \alpha)$ en $\cos\alpha = -\cos(180° + \alpha)$

$= 2(\cos(-100°) + i \sin(-100°))$ complementaire hoeken: $\sin\alpha = \cos(90° - \alpha)$ en $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$

Oefening 100 p. 159

Kies het juiste antwoord.

$\dfrac{\cos\alpha + i \sin\alpha}{\cos\beta - i \sin\beta} =$

A $\cos(\alpha + \beta)$

B $\sin(\alpha + \beta)$

C $\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$

D $\cos(\alpha + \beta) - i \sin(\alpha + \beta)$

E $\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)$

Antwoord C is juist.

$$\frac{\cos\alpha + i \sin\alpha}{\cos\beta - i \sin\beta} = \frac{\cos\alpha + i \sin\alpha}{\cos(-\beta) - i(-\sin(-\beta))}$$

tegengestelde hoeken: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ en $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$$= \frac{\cos\alpha + i \sin\alpha}{\cos(-\beta) + i \sin(-\beta)}$$

$$= \cos(\alpha - (-\beta)) + i \sin(\alpha - (-\beta))$$

$$= \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

Oefening 101 p. 159

Noem y en z twee complexe getallen die voldoen aan de voorwaarden $y + z = 3 - i$ en $\frac{z}{y} = 1 + i$.
Bereken de modulus van z.

A $|z| = 1$ **B** $|z| = 2$ **C** $|z| = 3$ **D** $|z| = 4$

(Bron: IJkingstoets BIR augustus 2021)

Antwoord B is juist.

$\frac{z}{y} = 1 + i$

$z = (1 + i) \cdot y$

$$\begin{aligned} y + z &= 3 - i \\ y + (1 + i) \cdot y &= 3 - i \\ y \cdot (1 + (1 + i)) &= 3 - i \\ y \cdot (2 + i) &= 3 - i \\ y &= \frac{3 - i}{2 + i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= (1 + i) \cdot y \\ &= (1 + i) \cdot \frac{3 - i}{2 + i} \\ &= \frac{3 + 3i - i + 1}{2 + i} \\ &= \frac{4 + 2i}{2 + i} \\ &= \frac{2 \cdot (2 + i)}{2 + i} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Oefening 102 p. 159

Gegeven is een getal z waarvan het beeldpunt op de goniometrische cirkel ligt.

a Bewijs dat daarbij geldt: $\frac{1}{z} = \bar{z}$.

$z = \cos\theta + i\sin\theta$

$\frac{1}{z} = \frac{\cos 0° + i\sin 0°}{\cos\theta + i\sin\theta}$

$= \cos(0° - \theta) + i\sin(0° - \theta)$

$= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$

$= \cos\theta - i\sin\theta$ tegengestelde hoeken

$= \bar{z}$

b Bewijs dat uit **a** volgt dat $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

$z \cdot \frac{1}{z} = 1$

$(\cos\theta + i\sin\theta) \cdot (\cos\theta - i\sin\theta) = 1$

$\cos^2\theta - i^2 \cdot \sin^2\theta = 1$

$\cos^2\theta - (-1) \cdot \sin^2\theta = 1$

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$