HB p. 48 - **Oefeningen** **Migratiematrix**

oef. 33 ; 34 ; 35 p. 48
oef. 37 ; 38 ; 39 p. 57

oef. 33 p. 48

Klantenmatrix

$$K = \begin{bmatrix} 2100 \\ 1800 \end{bmatrix}$$

Migratiematrix

$$\begin{array}{c|cc} & \text{van} & \\ \text{naar} & A & B \\ A & 0{,}85 & 0{,}05 \\ B & 0{,}15 & 0{,}95 \end{array} \quad M = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}05 \\ 0{,}15 & 0{,}95 \end{bmatrix}$$

Toestand na 1 jaar : $M \cdot K$

Toestand na 2 jaar : $M^2 \cdot K$

Enz.

Hoe evolueert het klantenbestand i.l.d. loop v.d. jaren?

$$M^{100} \approx \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}75 & 0{,}75 \end{bmatrix} \qquad M^{100} \cdot K \approx \begin{bmatrix} 975 \\ 2925 \end{bmatrix}$$

Als $p \to +\infty$, nadert M^p blijkbaar tot $\begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}75 & 0{,}75 \end{bmatrix}$
en $M^p \cdot K$ tot $\begin{bmatrix} 975 \\ 2925 \end{bmatrix}$

Het klantenbestand vindt dus een evenwicht in :

A: 975 klanten B: 2925 klanten

Bevestiging: $\begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}05 \\ 0{,}15 & 0{,}95 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 975 \\ 2925 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 975 \\ 2925 \end{bmatrix} \to$ evenwicht

oef. 34 p. 48

Migratiematrix

$$\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c}{\text{van}} & \\ A & B & \text{naar} \end{array}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \end{matrix}$$

Verdelingsmatrix

$$V = \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{bmatrix}$$

Evolutie :

$$M^{100} = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}6 \end{bmatrix}, \quad M^{100} \cdot V = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}$$

Als $p \to +\infty$, nadert M^p blijkbaar tot $\begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix}$
en $M^p \cdot K$ tot $\begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}$

Er ontstaat dus het volgende evenwicht :

A heeft 40% v.d. supporters , B heeft 60% .

Bevestiging: $\begin{bmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,6 \end{bmatrix}$

oef. 35 p. 48

$$M = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 1/6 & 1/4 & 1/3 \end{bmatrix} \quad , \quad T = \begin{bmatrix} 6 \\ 3,6 \\ 9 \end{bmatrix} \text{ (in miljoen)}$$

$$M \cdot T = \begin{bmatrix} 8,4 \\ 5,3 \\ 4,9 \end{bmatrix} \quad ; \quad M^{100} \approx \begin{bmatrix} 0,4118 & 0,4118 & 0,4118 \\ 0,3529 & 0,3529 & 0,3529 \\ 0,2353 & 0,2353 & 0,2353 \end{bmatrix}$$

$$M^{100} \cdot T = \begin{bmatrix} 7,658824 \\ 6,564706 \\ 4,376471 \end{bmatrix} \text{ (in miljoen)}$$

Als $p \to +\infty$ geldt: M^p nadert tot $\begin{bmatrix} 0,4118 & 0,4118 & 0,4118 \\ 0,3529 & 0,3529 & 0,3529 \\ 0,2353 & 0,2353 & 0,2353 \end{bmatrix}$

en T tot $\begin{bmatrix} 7,658824 \\ 6,564706 \\ 4,376471 \end{bmatrix}$ (in miljoen)

De bevolking heeft als evenwichtstoestand:

A: 7658824 ; B = 6 564 706 ; C = 4 376 471

Bevestiging: $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/6 \\ 1/6 & 1/4 & 1/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7658824 \\ 6564706 \\ 4376471 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\,658\,824 \\ 6\,564\,706 \\ 4\,376\,471 \end{bmatrix}$

HB p. 57

Lesliematrix

oef. 37 p. 57

$$\text{naar } L = \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{ccc} 0j & 1j & 2j \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1{,}3 & 0{,}9 \\ 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ 0j \\ 1j \\ 2j \end{array} \qquad P = \begin{bmatrix} 100 \\ 60 \\ 24 \end{bmatrix}$$

$$\text{Na 1 jaar: } L \cdot P = \begin{bmatrix} 100 \\ 60 \\ 24 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow 99{,}6 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\text{Na 2 jaar: } L^2 \cdot P = \begin{bmatrix} 100 \\ 60 \\ 24 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow 99{,}6 \\ \rightarrow 59{,}76 \\ \\ \end{array}$$

$$\text{Na 3 jaar: } L^3 \cdot P = \begin{bmatrix} 99 \\ 60 \\ 24 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow 99{,}28 \\ \rightarrow 59{,}76 \\ \rightarrow 23{,}9 \end{array}$$

$$\text{Na 4 jaar: } L^4 \cdot P = \begin{bmatrix} 99 \\ 60 \\ 24 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 99{,}2 \\ 59{,}57 \\ 23{,}9 \end{array}$$

$$\text{Na 5 jaar: } L^5 \cdot P = \begin{bmatrix} 99 \\ 60 \\ 24 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 98{,}96 \\ 59{,}52 \\ 23{,}83 \end{array}$$

De populatie blijft nagenoeg onveranderd.

oef. 38 p. 57

$$\text{naar } L = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0j & 1j & 2j & 3j \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 500 & 400 \\ 0{,}001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}4 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 0j \\ 1j \\ 2j \\ 3j \end{array} \qquad P = \begin{bmatrix} 300\,000 \\ 400 \\ 300 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$$\text{Na 1 jaar: } L \cdot P = \begin{bmatrix} 230\,000 \\ 300 \\ 120 \\ 120 \end{bmatrix} ; \text{ Na 2 jaar: } L^2 \cdot P = \begin{bmatrix} 108\,000 \\ 230 \\ 90 \\ 48 \end{bmatrix}$$

$$\text{Na 3 jaar: } L^3 \cdot P = \begin{bmatrix} 64\,200 \\ 108 \\ 69 \\ 36 \end{bmatrix} ; \text{ Na 4 jaar: } L^4 \cdot P = \begin{bmatrix} 48\,900 \\ 64 \\ 32 \\ 28 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \rightarrow 64{,}2 \\ \rightarrow 32{,}4 \\ \rightarrow 27{,}6 \end{array}$$

Na 5 jaar : $L^5 \cdot P = \begin{bmatrix} 27\,240 \\ 49 \\ 19 \\ 13 \end{bmatrix}$

Verdere evolutie, bvb. :

$L^{10} \cdot P = \begin{bmatrix} 2274 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; $L^{20} \cdot P = \begin{bmatrix} 17 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $L^{30} \cdot P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Conclusie : de populatie sterft uit.

<u>oef. 39 p. 57</u>

$$\text{naar} \quad L = \begin{array}{c} \text{van} \\ \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 & 3 \\ 0{,}6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}7 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \qquad P = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Na 1 jaar : $L^4 \cdot P = \begin{bmatrix} 4134 \\ 1750 \\ 258 \\ 252 \end{bmatrix}$; Na 2 jaar $L^8 \cdot P = \begin{bmatrix} 126\,783 \\ 36\,555 \\ 11\,434 \\ 4301 \end{bmatrix}$; Na 3 jaar $L^{12} \cdot P = \begin{bmatrix} 3\,355\,408 \\ 905\,726 \\ 314\,828 \\ 101\,080 \end{bmatrix}$

Na 4 jaar :

$L^{16} \cdot P = \begin{bmatrix} 86\,863\,903 \\ 23\,184\,502 \\ 8\,202\,285 \\ 2\,562\,526 \end{bmatrix}$; Verdere evolutie : $L^{40} \cdot P \approx \begin{bmatrix} 2{,}5484 \cdot 10^{16} \\ 6{,}7861 \cdot 10^{15} \\ 2{,}4095 \cdot 10^{15} \\ 7{,}4856 \cdot 10^{14} \end{bmatrix}$

Conclusie : de populatie neemt onbeperkt toe.