HB p. 95

Hfst 4 : Kansrekening : oefeningen

oef. 1 p. 95

b en e zijn geen kansexperimenten, de rest wel.

oef. 2 p. 95

* 1 geldstuk : $U = \{k, m\}$
* 2 geldstukken : $U = \{(k,k), (k,m), (m,k), (m,m)\}$
* 3 geldstukken :
  $U = \{(k,k,k), (k,k,m), (k,m,k), (m,k,k), (m,m,k), (m,k,m),$
  $(k,m,m), (m,m,m)\}$
* n geldstukken : - volgorde is belangrijk
  - herh. mag
  $\Rightarrow$ Herh. variaties : $\overline{V}_2^n = 2^n$ (= aantal)

oef. 3 p. 96

3 deelbeslissingen

- Deelbeslissing 1 : man / vrouw : 2 mog.
- Deelbeslissing 2 : gehuwd, ongehuwd, gescheiden, echtgeno(o)t(e) overleden : 4 mog.
- Deelbeslissing 3 : jonger dan 30, tussen 30 en 50 jaar, ouder dan 50 : 3 mog.

Aantal uitkomsten : $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$

oef. 4 p. 96

$U = \{(k,k), (k,m), (m,k), (m,m)\}$

Dus $\#U = 4$

a) $A = \{(k,k)\}$, $\#A = 1$ $\quad P(A) = \frac{1}{4}$ (Laplace)

b) $B = \{(k,m)\}$, $\#B = 1$ $\quad P(B) = \frac{1}{4}$ (Laplace)

c) $C = \{(k,m), (m,k)\}$, $\#C = 2$ $\quad P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (Laplace)

d) $D = \{(k,m), (m,k), (m,m)\}$, $\#D = 3$ $\quad P(D) = \frac{3}{4}$ (Laplace)

oef. 5 p. 96

$U = \{(k,k,k), (k,k,m), (k,m,k), (m,k,k), (k,m,m)$
$(m,k,m), (m,m,k), (m,m,m)\}$

Dus $\#U = 8$

a) $A = \{(k,k,m), (m,k,k), (k,m,k)\}$, $\#A = 3$
$P(A) = \frac{3}{8}$ (Laplace)

b) $B = \{(k,k,k)\}$, $\#B = 1$, $P(B) = \frac{1}{8}$ (Laplace)

c) $C = \{(k,k,k), (m,m,m)\}$, $\#C = 2$, $P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ (Laplace)

oef. 6 p. 96

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\#U = 6$

a) $A = \{1, 3, 5\}$, $\#A = 3$, $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (Laplace)

b) $B = \{2, 3, 5\}$, $\#B = 3$, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (Laplace)

c) $C = \{4, 5, 6\}$, $\#C = 3$, $P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (Laplace)

d) $D = \{1, 2, 3, 4\}$, $\#D = 4$, $P(D) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (Laplace)

oef. 10 p. 96

$U = \{(1,1,1), (1,1,2), \ldots (1,1,6), (1,2,1), (1,2,2), \ldots (6,6,6)\}$

→ volgorde speelt een rol
→ herh. mag
$\Big\}$ $\#U = W_6^3 = 6^3 = 216$

a) A : "som vd ogen gelijk aan 7"

ga systematisch te werk

$A = \{(1,1,5), (1,2,4), (1,3,3), (1,4,2), (1,5,1), (2,1,4), (2,2,3),$
$(2,3,2), (2,4,1), (3,1,3), (3,2,2), (3,3,1), (4,1,2), (4,2,1),$
$(5,1,1)\}$ → $\#A = 15$

Regel van Laplace : $P(A) = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}$

b) B: "som aantal ogen minstens 4"

We nemen de complementaire gebeurtenis $\bar{B}$: "som v/d ogen minder dan 4"

$\bar{B} = \{1,1,1\}$, $P(\bar{B}) = \frac{1}{216}$

Dus $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{1}{216} = \frac{215}{216}$

c) C: "som aantal ogen minstens 5"

Analoog puntje b: $\bar{C}$: "som v/d ogen minder dan 5"

$\bar{C} = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1)\}$

$P(\bar{C}) = \frac{4}{216}$

Dus $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - \frac{4}{216} = \frac{212}{216} = \frac{53}{54}$

<u>oef. 11 p. 96</u>

Omdat we graag de formule van Laplace willen toepassen, maken we een onderscheid tussen de 2 vijven die op de dobbelsteen voorkomen (dan is elke gebeurtenis even waarschijnlijk → Laplace)

→ oorspronkelijke 5 : 5_1

→ nieuwe 5 : 5_2 (vervanger van 6)

Uitkomstenverzameling:

$U = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5_1), (1,5_2),$
$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5_1), (2,5_2),$
$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5_1), (3,5_2)$
$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5_1), (4,5_2),$
$(5_1,1), (5_1,2), (5_1,3), (5_1,4), (5_1,5_1), (5_1,5_2),$
$(5_2,1), (5_2,2), (5_2,3), (5_2,4)(5_2,5_1), (5_2,5_2)\}$ → $\#U = 36$

A: 'som v/d ogen minstens 9':

$A = \{(4,5_1), (4,5_2), (5_1,4), (5_2,4)(5_1,5_1), (5_1,5_2), (5_2,5_1), (5_2,5_2)\}$

Laplace: $P(A) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$ ↳ $\#A = 8$

oef. 13 p. 97

$\# U = 12$ (3 witte, 4 rode, 5 blauwe)

a) $\# A = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

b) $\# B = 4 \Rightarrow P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

c) $\# C = 5 \Rightarrow P(C) = \frac{5}{12}$

d) $\# D = \# A + \# B \Rightarrow \# D = 7 \Rightarrow P(D) = \frac{7}{12}$

e) $\# E = \# B + \# C \Rightarrow \# E = 9 \Rightarrow P(E) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

f) $\# F = \# U - \# B \Rightarrow \# F = 8 \Rightarrow P(F) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

oef. 16 p. 97

Volgorde waarin je de knikkers trekt, speelt geen rol

↳ combinaties (geen herh.) : $\# U = C^2_{10}$

a) $P(A) = \dfrac{C^2_4}{C^2_{10}} = \dfrac{6}{45} = \dfrac{2}{15}$

b) $P(B) = \dfrac{C^1_2 \cdot C^1_4}{C^2_{10}} = \dfrac{8}{45}$

c) $P(C) = \dfrac{C^2_8}{C^2_{10}} = \dfrac{28}{45}$

d) Methode 1:

$\bar{D}$ = "precies 2 rode knikkers": $P(\bar{D}) = \dfrac{C^2_2}{C^2_{10}} = \dfrac{1}{45}$

$P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - \dfrac{1}{45} = \dfrac{44}{45}$

Methode 2:

D_1 = precies 1 rode knikker

D_2 = geen rode knikker

Dan geldt: $D = D_1 \cap D_2$ (D_1 en D_2 disjunct)

$$P(D) = P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) \quad \text{(somwet)}$$
$$= \frac{C_2^1 \cdot C_8^1}{C_{10}^2} + \frac{C_8^2}{C_{10}^2} = \frac{16}{45} + \frac{28}{45} = \frac{44}{45}$$

e) E_1 : 2 rode knikkers

E_2 : 2 witte knikkers

E_3 : 2 blauwe knikkers

$$P(E) = P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)$$
$$= \frac{C_2^2}{C_{10}^2} + \frac{C_4^2}{C_{10}^2} + \frac{C_4^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45} + \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{13}{45}$$

f) $\bar{F}$ = 2 knikkers met dezelfde kleur = E

$$P(F) = 1 - P(\bar{F}) = 1 - P(E) = 1 - \frac{13}{45} = \frac{32}{45}$$

<u>oef. 18 p. 97</u>

a) $P(A) = \dfrac{C_4^3}{C_{32}^3} = \dfrac{4}{4960} = \dfrac{1}{1240}$

b) $\bar{B}$ = het zijn 3 azen = A

$P(B) = 1 - P(B) = 1 - P(A) = \dfrac{1239}{1240}$

c) $P(C) = \dfrac{C_4^1 \cdot C_{28}}{C_{32}^3} = \dfrac{4 \cdot 378}{4960} = \dfrac{1512}{4960} = \dfrac{189}{620}$

<u>oef. 19 p. 97</u>

a) $P(A) = \dfrac{C_{13}^4}{C_{52}^4} = \dfrac{715}{270725} = \dfrac{11}{4165}$

b) $\left(P(B) = \dfrac{C_{13}^4 + C_{13}^4}{C_{52}^4} = \dfrac{715 + 715}{270725} = \dfrac{22}{4165} \right.$ = kans dat het 4 schoppen of 4 klaveren zijn

verkeerde interpretatie

$\rightarrow P(B) = \dfrac{C_{26}^4}{C_{52}^4} = \dfrac{14950}{270725} = \dfrac{46}{833}$

c) $P(C) = \dfrac{C_4^2 \cdot C_4^2}{C_{52}^4} = \dfrac{36}{270\,725}$

d) $P(D) = 1 - P(\bar{D})$ met $\bar{D}$ = geen aas

$= 1 - \dfrac{C_{48}^4}{C_{52}^4} = 1 - \dfrac{194\,580}{270\,725} = 1 - \dfrac{38\,916}{54\,145} = \dfrac{15\,229}{54\,145}$

$= 0{,}2812632745$ (GRM zet dit niet om naar breuk)

e) F = precies 1 harten
G = geen harten
} $E = F \cup G$

$P(E) = P(F) + P(G)$

$= \dfrac{C_{13}^1 \cdot C_{39}^3}{C_{52}^4} + \dfrac{C_{39}^4}{C_{52}^4} = \dfrac{118\,807}{270\,725} + \dfrac{82\,251}{270\,725} = \dfrac{201\,058}{270\,725}$

$= \dfrac{15\,466}{20\,825} = 0{,}742665066$

oef. 21 p. 98

a) $0{,}05 \cdot (1 - 0{,}86) = 0{,}05 \cdot 0{,}14 = 0{,}007 = \dfrac{7}{1000}$

b) $0{,}40 \cdot 0{,}86 + 0{,}10 \cdot 0{,}85 = 0{,}429 = \dfrac{429}{1000}$

c) Aantal personen met negatieve resusfactor:
(op 1000 mensen) : $56 + 15 + 7 + 72 = 150$
$\hookrightarrow (0{,}40 \cdot 0{,}14) \cdot 1000$

Daarvan hebben 72 personen bloedgroep 0

$P(C) = \dfrac{72}{150} = \dfrac{12}{25}$

OF : $\dfrac{(0{,}40 \cdot 0{,}14) + (0{,}10 \cdot 0{,}15) + (0{,}05 \cdot 0{,}14) + (0{,}45 \cdot 0{,}16)}{(0{,}45 \cdot 0{,}16)}$

teller en noemer wisselen!

$= \dfrac{0{,}072}{0{,}15} = 0{,}48 = \dfrac{480}{1000} = \dfrac{12}{15}$

Oef. 24 p. 98

Volgorde speelt geen rol, geen herhaling → combinatie
We nemen als uitkomstenverzameling de 2 personen die moeten lopen. Dit kan op C_5^2 manieren.

a) $\# A = 1 \quad \rightarrow \quad P(A) = \frac{1}{C_5^2} = \frac{1}{10}$

b) B = {(dochter 1, zoon 1), (dochter 1, zoon 2), (dochter 2, zoon 1), (dochter 2, zoon 2)

$\Leftrightarrow \# B = 4 \quad \rightarrow \quad P(B) = \frac{4}{C_5^2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

Oef. 26 p. 99

geen herhaling, volgorde niet belangrijk
groepjes van 4, te kiezen uit 9 elementen

$\Leftrightarrow \# U = C_9^4 = 126$

a) $\# A = C_6^4 = 15$

$P(A) = \frac{15}{126} = \frac{5}{42}$

b) $\# B = C_6^3 \cdot C_3^1 = 60$

$P(B) = \frac{60}{126} = \frac{10}{21}$

c) minstens 2 → precies 2, precies 3 of precies 4

$\# C = C_6^2 \cdot C_3^2 + C_6^3 \cdot C_3^1 + C_6^4 \cdot C_3^0 = 45 + 60 + 15 = 120$

$\rightarrow P(C) = \frac{120}{126} = \frac{20}{21}$

d) minder dan 2 juist is 1 juist want je moet er sowieso 1 juist hebben (4 vragen, 3 hfst'en niet geleerd)

$P(D) = \frac{C_6^1 \cdot C_3^3}{C_9^4} = \frac{6}{126} = \frac{1}{21}$

OF: $P(D) = 1 - P(C) = 1 - \frac{20}{21} = \frac{1}{21}$

oef. 30 p. 99

Herhaling komt voor en volgorde speelt een rol

↳ herh. variatie : $W_4^4 = \#U = 4^4$

A = "iedere leerling leert een verschillend hoofdstuk"

↳ $\#A = P_4 = 4! = 24$

$$P(A) = \frac{4!}{W_4^4} = \frac{24}{256} = \frac{3}{32}$$

oef. 32 p. 99

Uitkomst is willek. volgorde van 12 pers. : $P_{12} = 12! = \#U$

A = "A zit naast B"

We beschouwen A en B als 1 blok. Dit kan op 2 manieren : AB of BA.

Blok, lkr en 9 andere lln te verdelen over 11 plekjes:

$P_{11} = 11!$ → dus $\#A = 2 . P_{11} = 2 \cdot 11! = 79\,833\,600$

Dus $P(A) = \frac{2 \cdot P_{11}}{P_{12}} = \frac{2 \cdot 11!}{12!} = \frac{79\,833\,600}{479\,001\,600} = \frac{1}{6}$

oef. 36 p. 100

$\#V = 5$, $\#Z = 7$, $\#(V \cap Z) = 3$

$$\begin{aligned}\#(V \cup Z) &= \#V + \#Z - \#(V \cap Z) \\ &= 5 + 7 - 3 \\ &= 9\end{aligned}$$

$$P(V \cup Z) = \frac{9}{20}$$

OF : $$\begin{aligned}P(V \cup Z) &= P(V) + P(Z) - P(V \cap Z) \\ &= \frac{5}{20} + \frac{7}{20} - \frac{3}{20} \\ &= \frac{9}{20}\end{aligned}$$